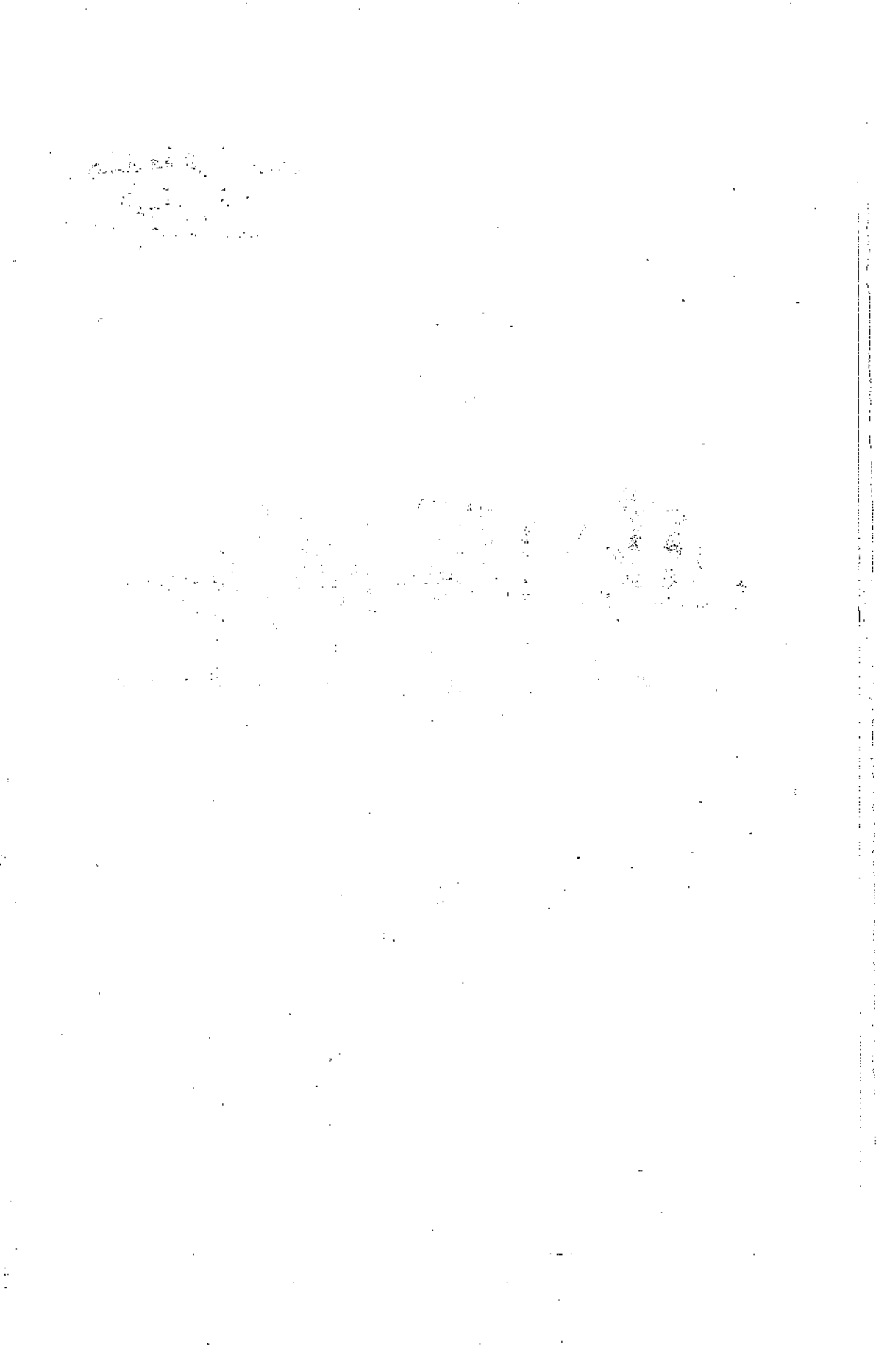




ديناميكا 1



بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة عن الميكانيكا

الحمد لله رب العالمين، حمداً يوافي نعمه وآلاءه ويكافي مزيده وعطاءه، وأشهد أن لا إله إلا الله، وأن محمداً رسول الله صلى الله عليه وسلم.

الميكانيكا النظرية علم يعني بدراسة القوانين العامة للحركة الميكانيكية، والتأثير الميكانيكي المتبادل بين الأجسام. والحركة الميكانيكية هي إزاحة لجسم بالنسبة إلى جسم آخر في الفراغ والزمن. والتأثير الميكانيكي هو ذلك التأثير المتبادل بين الأجسام؛ الذي يغير أو يحاول تغيير طبيعة الحركة الميكانيكية.

التأصيل اللغوي لكلمة "ديناميكا"

في اللغة الإنجليزية كل من dynam، dynamis بادئة معناها "القوة". ويقال: dynamometer بمعنى مقياس القوة. وكلمة dynamis بمعنى المولد، وكلمة dynamotor بمعنى المحرك المولد. وكلمة dynamic كصفة من dynam تصف الشيء باستمرار التغير أو استمرار الفاعلية. وكلمة dynamics بمعنى: القوي المحركة طبيعية كانت أو أخلاقية أو فكرية، وفي الاصطلاح تعني علم الحركة.

وعلي هذا فإن كلمة "ديناميكا" ليست عربية، وإنما تعريب لكلمة dynamics، ويقصد بها علم الحيل؛ فرع من الفيزياء يبحث في أثر القوة في الأجسام.

الميكانيكا في القرآن الكريم:

عن الحركة والسكون يقول القرآن الكريم: ﴿ألم تر إلى ربك كيف مد الظل ولو شاء لجعله ساكناً ثم جعلنا الشمس عليه ذليلاً﴾ (الفرقان: 45). ﴿وله ما سكن في الليل والنهار وهو السميع العليم﴾ (الأنعام: 13). ﴿وقال اركبوا فيها باسم الله مجريها وممرساها﴾ (هود: 41). ﴿وتري الجبال تحسبها جامدة وهي تمر من السحاب﴾ (النحل: 88). وفي تفسير الألويسي "سكن" بمعنى استقام واتزن.

وعن الجاذبية يقول تعالى: ﴿إِنَّ اللَّهَ يُمْسِكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ أَنْ تَزُولَا وَلَئِنْ زَالَتَا إِنْ أُمْسِكُهُمَا مِنْ أَحَدٍ مِنْ بَعْدِهِ إِنَّهُ كَانَ حَلِيمًا غَفُورًا﴾ (فاطر: 41).
﴿وَيُمْسِكُ السَّمَاءَ أَنْ تَقَعَ عَلَى الْأَرْضِ إِلَّا بِإِذْنِهِ﴾ (الحج: 65). ﴿اللَّهُ الَّذِي رَفَعَ السَّمَاوَاتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا﴾ (الرعد: 2).

وعن الاتجاهات يقول سبحانه: ﴿وَمَنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ﴾ (البقرة: 149). ﴿وَعَلَامَاتٍ وَبِالنَّجْمِ هُمْ يَهْتَدُونَ﴾ (النحل: 16).

وعن النظرية النسبية يقول جل من قائل: ﴿يُدَبِّرُ الْأَمْرَ مِنَ السَّمَاءِ إِلَى الْأَرْضِ ثُمَّ يَعْرَجُ إِلَيْهِ فِي يَوْمٍ كَانَ مِقْدَارُهُ أَلْفَ سَنَةٍ مِمَّا تَعْلُونَ﴾ (السجدة: 5).

لمحة تاريخية:

والميكانيكا من أقدم العلوم، نشأ وتطور لتلبية حاجة البناء والزراعة وصناعة الآلات والأسلحة ووسائل النقل، ثم ببناء المدن والمباني الضخمة وتطور الحرف والملاحة، وغير ذلك. فهو علم يستعين به الإنسان على مهام الخلافة في الأرض وهو أنشأكم من الأرض واستعمركم فيها﴾ (هود: 61).

وتدل آثار البابليين والآشوريين والفينيقيين على أن الحضارات القديمة كانت على إمام بالميكانيكا، وهو إمام تجريبي تطلب عصوراً طويلة وجهوداً مضنية حتى تحول إلى صياغة قوانين عامة، كانت أساساً لعلم الميكانيكا الحديث.

ويعتبر أرشميدس (287-212 ق.م. مؤسساً لعلم الميكانيكا، فقد قدم حلاً دقيقاً لمسألة اتزان قوي الرافعة، ووضع أول دراسة لمركز ثقل الأجسام، واكتشف قانون الضغط الاستاتيكي المشهور باسمه.

وكان لعلماء المسلمين - في القرون الوسطى إذ كانت أوروبا تعاني من الجهل والتخلف - إسهامات كثيرة في استيعاب وتعريب وتطوير علم الميكانيكا وربطه بالله. تلك النهضة المرتبطة بأبحاثهم في الفلك والملاحة والرياضيات والطبيعة والمعمار... إلخ. ومن أبرز علماء المسلمين البيروني (973-1048 م، والبتاني الذي درس البندول وثابت بن قرة (836-901 م) وغيرهم.

وفي عصر النهضة كان الإنجليزي إسحاق نيوتن (1642-1727) مكتشف قانون الجذب العام وقوانين الحركة. والفرنسي جوزيف لويس لاجرانج (1736-1813) م واضع الأسس الحديثة للديناميكا التحليلية. والأيرلندي هاملتون (1805-1865) م مبتكر التحليل الاتجاهي وصاحب المبدأ المعروف باسمه في الديناميكا والألماني الأصل ألبرت اينشتاين (1879-1955) م بإسهاماته في النسبية وميكانيكا الكم ... وغيرهم كثير.

وفي القرنين الثامن عشر والتاسع عشر انبثق عن الميكانيكا عدة علوم مثل نظرية المرونة، وميكانيكا الموائع. وفي القرن العشرين ظهرت النسبية وميكانيكا الكم.

الميكانيكا النظرية:

كلمة "ميكانيكا" تعريب لكلمة mechanics وأصلها كلمة machine أي آلة. والميكانيكا النظرية تنقسم إلى ثلاثة أقسام:

1- الاستاتيكا: وتبحث الدراسات العامة للقوي وشروط اتزان الأجسام المادية تحت تأثير هذه القوي.

2- الكينماتيكا: وتبحث حركة الأجسام في الفراغ من وجهة النظر الهندسية دون التعرض للقوي المسببة لهذه الحركة.

3- الديناميكا: وتبحث في حركة الأجسام في الفراغ تحت تأثير القوي المؤثرة، والمعادلات التي تصف الحركة. أو هو علم دراسة الحركة، أو دراسة الكميات المتغيرة مع الزمن. وهذا القسم الأخير هو موضع مقررنا بتوفيق الله تعالى.

هذا المقرر: (ديناميكا (1))

ونبدأ هذا المقرر بدراسة المتجهات المتغيرة واشتقاقها وتكاملها، ونقدم متجهات الموضع والسرعة والعجلة، ثم نقدم تحصيل وتحليل السرعات، والسرعة النسبية؛ هذا في الباب الأول. أما في الباب الثاني ندرس فيه حركة الأجسام تحت تأثير قوة، ونقدم قوانين نيوتن للحركة والتي تبحث العلاقة بين القوة والحركة. وفي الباب الثالث ندرس حركة نقطة مادية في منحنى مستوي، متمثلة في حركة المقذوفات. وفي الباب الرابع نتناول بتفصيل حركة نقطة مادية في دائرة. أما في

الباب الأخير (الخامس) فندرس الدفع والتصادم وبقاء كمية الحركة وقانون نيوتن التجريبي.

ونقدم مع كل باب عدداً من الأمثلة أو التطبيقات والمسائل المحولة وكذلك التمارين، مع الحرص على ربط المادة العلمية بالواقع لأن التطبيقات تهدف تحقيق دقة معرفة الطالب بالمادة العلمية والنظرية، والمسائل المحولة لإكساب الطالب المهارة اللازمة لحل مشاكل ومسائل هذا المقرر بعد كل باب، وربط المادة العلمية بالواقع - قدر الإمكان - ليشترب الدارس حب هذا العلم.

وأخيراً، تم اختيار هذا المقرر بهذه الصورة لسببين (الأول): ليتحقق للطالب الانتقال التدريجي والربط السليم بين ما درسه في الثانوية العامة وما سيدرسه في الكلية - إن شاء الله تعالى. و(الثاني): يخلو هذا المقرر من التفاضلات المتعددة أو التكميلات الموزعة في التخصص، نظراً لأن الطالب لم يدرس مثلها من قبل. هذا وبالله التوفيق، والسداد إلى كل ما يحبه ويرضاه، فإنه هو نعم المولي ونعم الوكيل.

د/ خالد إبراهيم بنورة

الباب الأول

الموضع - السرعة - العجلة

الحمد لله

الحمد لله

الباب الأول

متجهات الموضع – السرعة – العجلة

(Position – Velocity – Acceleration vectors)

1-1- المتجهات:

إن بعض الكميات الفيزيائية، كدرجة الحرارة، والكتلة، والكثافة، والطول..... وغيرها، تسمى بالكميات القياسية (Scalars). ويمكن تحديد أية كمية قياسية بعدد واحد فقط، يعبر عن نسبة هذه الكمية إلى وحدة القياس. وتسمى بعض الكميات الأخرى، مثل القوة، والإزاحة، والسرعة، والعجلة، وكمية الحركة، والمساحة،... وغيرها، بالكميات المتجهة أو المتجهات (Vectors). ولا يكفي عدد واحد فقط لتحديد المتجه، فله علاوة علي معياره (Modulus)، (أو مقداره) اتجاه ينبغي معرفته أيضا لتحديد المتجه تحديدا تاما.

1-1-1- متجه الموضع في الفراغ (Position Vector):

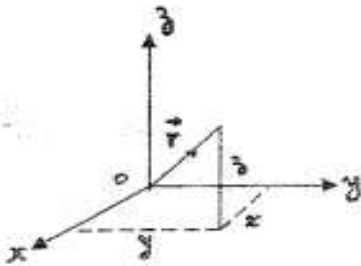
يتحدد موضع النقطة المادية في مجموعة الاحداثيات المستخدمة بمتجه الموضع $\vec{r}$ الذي بدايته في نقطة الأصل، ونهايته هي النقطة المادية محل البحث. فالمعادلة الاتجاهية $\vec{r} = f(t)$ تحدد مسار حركة النقطة المادية، وهي تكافئ ثلاث معادلات قياسية هي:

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, ويكتب متجه الموضع على الصورة:

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

ومقدار هذا المتجه $\vec{r}(t)$ عند أي لحظة زمنية t يرمز له بالرمز $|\vec{r}(t)|$ أو $r(t)$ ويعطي

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$



شكل (1) متجه الموضع في الفراغ.

مثال(1): إذا كان $\vec{dr}/dt = \vec{A}t + \vec{B}$ ، حيث $\vec{A}$, $\vec{B}$ متجهان اختياريان وثابتان. فأوجد متجه الموضع $\vec{r}$ ، إذا كانت بداية الحركة من نقطة الأصل.

الحل: بفصل المتغيرات $d\vec{r} = \vec{A}t dt + \vec{B} dt$ وبالتكامل يكون $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{A}t^2 + \vec{B}t + \vec{C}$

، حيث $\vec{C}$ متجه ثابت التكامل. وفي البداية $t=0$ ، $\vec{r} = \vec{0}$ ، فإن: $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{A}t^2 + \vec{B}t$ ،

لأن $\vec{C} = \vec{0}$. فإذا كان كل من $\vec{A}$, $\vec{B}$ على الصورة (4)، فإن مركبات متجه الموضع

$$x = \frac{1}{2}A_x t^2 + B_x t, \quad y = \frac{1}{2}A_y t^2 + B_y t,$$

$$z = \frac{1}{2}A_z t^2 + B_z t$$

2-1-1- متجه السرعة (Velocity Vector):

نفرض أن النقطة المادية المتحركة كانت في اللحظة الزمنية t في الموضع M ، الذي

يتحدد بمتجه الموضع $\vec{r}$ ، وفي اللحظة $t_1 = t + \Delta t$ انتقلت إلى الموضع M_1 ، الذي

يتحدد بالمتجه $\vec{r}_1$ ، وعندئذ يتحدد انتقال النقطة خلال الفترة الزمنية $\Delta t = t_1 - t$ بالمتجه

$\overrightarrow{MM_1}$ ، والذي سنسميه بمتجه الإزاحة للنقطة، ويتجه على امتداد الوتر في حالة الحركة

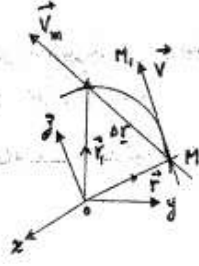
المنحنية، وتعطي النسبة

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (\text{Vector of mean velocity})$$

متجه السرعة المتوسطة للنقطة المادية خلال الفترة الزمنية Δt . ويتجة $\vec{V}_m$ تماماً مثل

$\overrightarrow{MM_1}$ انظر شكل (2).

الباب الاول



شكل (2) متجه الإزاحة $\overrightarrow{MM_1}$ ، والسرعة المتوسطة $\overrightarrow{v_m}$ ، و السرعة اللحظية $\vec{v}$.

وسرعة النقطة في اللحظة الزمنية t هي المتجه الأول الذي تؤول إليه السرعة المتوسطة عندما $\Delta t \rightarrow 0$ ، وتسمى بالسرعة اللحظية عند t .

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{v_m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}$$

إن متجه السرعة اللحظية يساوي مشتقة متجه الموضع بالنسبة للزمن وحيث إن المماس هو الاتجاه النهائي الذي يؤول إليه القاطع MM_1 فإن متجه السرعة اللحظية للنقطة المادية يتجه علي امتداد المماس لمسار النقطة في اتجاه حركتها. وبالاستعانة بمجموعة الإحداثيات الكرتيزية $oxyz$ ، نجد:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad \therefore \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k},$$

حيث $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$, $\dot{z} = dz/dt$ هي مساقط متجه السرعة علي

المحاور الإحداثية. ومقدار السرعة يعطي من: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. وفي حالة

الحركة المستوية ($z = 0$)، يصبح لمتجه السرعة مسقطان (أي مركبتان) فقط؛ أي أن:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$$

مقدارها θ مع المحور ox تعين من العلاقة $\tan \theta = \dot{y} / \dot{x} = dy / dx$.

1-1-3- متجه العجلة (Acceleration Vector):

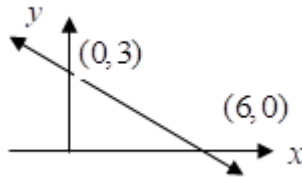
إذا كانت سرعتنا نقطة مادية في اللحظتين الزمنيتين متناهيتي القرب $t, t + \Delta t$ هي $\vec{V}, \vec{V} + \Delta \vec{V}$ فإن عجلة النقطة المادية عند اللحظة t تعرف بأنها:

$$\vec{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

أي أن متجه العجلة هو معدل تغير متجه السرعة بالنسبة للزمن، وبالاستعانة بمجموعة الإحداثيات الكرتيزية $oxyz$ نجد أن $\vec{f} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$ ، حيث $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ ، $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ ، $\ddot{z} = d^2z/dt^2$ ، ومقدار العجلة هو $f = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}$. وفي حالة النقطة المادية في المستوي ($z = 0$) يكون $f = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2}$ ، $\vec{f} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$ ، ويصنع المتجه $\vec{f}$ زاوية ϕ مع محور x ، وتعطي بالعلاقة $\tan \phi = \ddot{y} / \ddot{x}$.

مثال (2): إذا كان $\vec{r} = 2t\hat{i} + (3-t)\hat{j}$ ، أوجد معادلة المسار للنقطة المتحركة.

الحل: من متجه الموضع $\vec{r}$ نستنتج أن $x = 2t$ ، $y = 3 - t$ وبحذف t بين x, y نجد أن: $x + 2y - 6 = 0$ ، وهذه هي معادلة المسار للنقطة المتحركة وهي تمثل خطاً مستقيماً



شكل (3) الخط المستقيم $x + 2y - 6 = 0$

يمكن تحديده في المستوي كما بشكل (3)، إما بمعرفة ميله ومقطعه مع محور الصادات، أو بمعرفة مقطعيه علي محوري السينات والصادات.

الباب الاول

مثال(3): تتحرك نقطة مادية في المستوي بحيث يكون متجه موضعها عند t هو

$$\vec{r} = (t^2 - 2t)\hat{i} + (t^3 - 3t^2 + 3t)\hat{j}$$

لحظة بدء قياس الزمن، ثم عين متي وأين تكون السرعة موازية لمحور الصادات Oy ؟

الحل: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \therefore \vec{v} = 2(t-1)\hat{i} + 3(t^2 - 2t + 1)\hat{j}$

عند بدء قياس الزمن ($t = 0$) فتكون $\vec{v} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ ، $v = \sqrt{13}$ ، $\tan \theta = -3/2$.

وتتحرك النقطة المادية في اتجاه موازي لمحور الصادات OY إذا كان $\dot{x} = 0$ ، ومنها نحصل علي:

$$\therefore 2(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{Sec}$$

ولتحديد موضع النقطة المادية في هذه اللحظة نضع $t = 1$ في متجه الموضع، فيكون

$$\vec{r}(1) = -\hat{i} + \hat{j} \text{ أي تكون النقطة المادية عند الموضع } (-1, 1).$$

مثال(4): تتحرك جسيم في مستوي، وكان $\vec{r} = (2t^3 + 3t^2 + 6t)\hat{i} + (t^2 + 2t + 2)\hat{j}$ هو

متجه موضعه. أوجد متجه السرعة ومقداره واتجاهه بعد مضي ثانيتين، وكذلك بعد مضي خمس ثوان، وما السرعة الابتدائية للحركة ؟

الحل: متجه السرعة علي الصورة:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6(t^2 + t + 1)\hat{i} + 2(t + 1)\hat{j}$$

بعد مضي ثانيتين ($t = 2 \text{Sec}$) فان:

$$\therefore \vec{v} = 42\hat{i} + 6\hat{j} \quad \therefore v_2 = 30\sqrt{2}, \quad \theta_2 = \tan^{-1}(1/7)$$

وبعد مضي خمس ثوان ($t = 5 \text{sec}$):

$$\therefore \vec{v} = 186\hat{i} + 12\hat{j} \quad \therefore v_5 = \sqrt{(186)^2 + (12)^2}, \quad \theta_5 = \tan^{-1}(2/31)$$

ولإيجاد السرعة الابتدائية نضع $t = 0$ في متجه السرعة $\vec{v}$

$$\therefore \vec{v} = 6\hat{i} + 2\hat{j}, \quad v_0 = 2\sqrt{10}, \quad \theta_0 = \tan^{-1}(1/3)$$

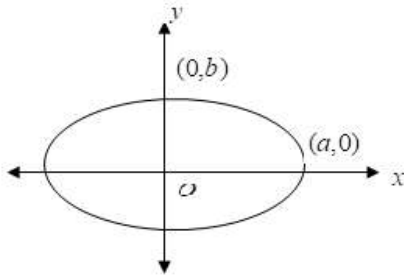
الباب الاول

مثال (5): تتحرك نقطة مادية في المستوي بحيث يكون $\vec{r}$ بعد مضي فترة زمنية t من بدء الحركة هو $\vec{r} = a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j}$ حيث a, b, ω ثوابت اثبت أن $\vec{r} \wedge \vec{v}$ ثابت، وأن متجه العجلة علي الصورة $\vec{f} = -\omega^2 \vec{r}$ ، وأوجد معادلة المسار.

الحل:

$$\begin{aligned}
 \therefore \vec{r} &= a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j} \\
 \therefore \vec{v} &= -a\omega \sin \omega t \hat{i} + b\omega \cos \omega t \hat{j} \\
 \therefore \vec{r} \wedge \vec{v} &= ab\omega \hat{k} \Rightarrow |\vec{r} \wedge \vec{v}| = ab\omega = \text{const.} \quad \text{متجه ثابت} \\
 \therefore \vec{f} &= -a\omega^2 \cos \omega t \hat{i} - b\omega^2 \sin \omega t \hat{j} = -\omega^2 \vec{r} \\
 \therefore x &= a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t \\
 \therefore x^2 &= a^2 \cos^2 \omega t, \quad y^2 = b^2 \sin^2 \omega t \\
 \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

و هي معادلة المسار وتمثل صورة قطع ناقص كما في شكل (7).



شكل (4) مسار حركة الجسم وهو قطع ناقص

مثال (6): إذا كانت $\vec{f} = 6t\hat{i} + 8\hat{j}$ هي عجلة نقطة مادية تتحرك في المستوي. أوجد متجهي السرعة والموضع إذا علم أن النقطة بدأت الحركة من نقطة الأصل بسرعة 3 ft/Sec في اتجاه محور السينات، ثم أوجد معادلة المسار للنقطة المتحركة.

$$\therefore \vec{f} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\therefore \vec{v} = \int \vec{f} dt + \vec{C}_1 \quad \text{حيث } \vec{C}_1 \text{ متجه ثابت التكامل}$$

$$\therefore \vec{v} = 3t^2 \hat{i} + 8t \hat{j} + \vec{C}_1$$

ومن الشروط الأولية (عند $t = 0$, كانت $\vec{v} = 3\hat{i}$) فإن $\vec{C}_1 = 3\hat{i}$ ، ومن ثم

$$\therefore \vec{v} = (3t^2 + 3)\hat{i} + 8t\hat{j} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\therefore \vec{r} = (t^3 + 3t)\hat{i} + 4t^2\hat{j} + \vec{C}_2 \quad \text{بالتكامل نجد أن:}$$

ومن الشروط الأولية نجد أن $\vec{r} = \vec{0}$ عندما $t = 0$ ، فإن $\vec{C}_2 = \vec{0}$

$$\therefore \vec{r} = (t^3 + 3t)\hat{i} + 4t^2\hat{j}$$

أي أن

$$x = t^3 + 3t, \quad y = 4t^2 \quad \therefore t = \frac{1}{2}\sqrt{y}$$

إذن معادلة المسار تكون:

$$\therefore x = \left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)$$

$$\therefore 64x^2 - y^3 - 24y^2 - 144y = 0$$

تمارين (1-1)

متجهات الموضع – السرعة – العجلة

(1) تتحرك نقطة مادية في مستوي بحيث يكون متجه الموضع لها عند اللحظة t هو $\vec{r} = (t^2 - 5t)\hat{i} + (t^3 - 4t^2 + t)\hat{j}$. أوجد متجه السرعة عند بدء الزمن، وبين متي وأين ستكون السرعة موازية لمحور الصادات؟

$$\left[\vec{v}_0 = -5\hat{i} + \hat{j}, t = 5/2, \vec{r} = -\frac{55}{4}(\hat{i} + \hat{j}/2) \right]$$

(2) يتحرك جسيم علي مسار منحنى، معادلاته البارامترية هي

$$z = 4\sin 3t, \quad x = 3e^{-2t}, \quad y = 5\cos 3t,$$

(أ) السرعة والعجلة عند أي لحظة، (ب) مقداري السرعة والعجلة عند $t = 0$.

(3) يتحرك جسيم في مستوي بحيث كان متجه الموضع يعطي بالعلاقة

$$\vec{r} = (3t^2 + 6t - 4)\hat{i} + (4t^2 - 2t + 1)\hat{j}$$

أوجد السرعة والعجلة مقداراً واتجاهاً عند أي لحظة، واثبت أن العجلة ثابتة.

$$[f = 5\sqrt{2}]$$

(4) أوجد متجهي السرعة والعجلة لجسيم يتحرك في الحالات الآتية بحيث كانت متجهات موضعه هي:

$$(i) \quad \vec{r} = 2t\hat{i} - t^2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k}$$

$$(ii) \quad \vec{r} = (5t^2 - 12t + 4)\hat{i} + t^2\hat{j} - 3t\hat{k}$$

$$(iii) \quad \vec{r} = f \cos \omega t \hat{i} + (f \cos \omega t + b \sin \omega t) \hat{j}$$

(5) تتحرك نقطة مادية وكانت متجهات الموضع هي:

$$(i) \quad \vec{r} = (2t^3 + 3t^2 + 6t)\hat{i} + (t^2 + 2t + 2)\hat{j}$$

$$(ii) \quad \vec{r} = (t^2 + t)\hat{i} + (3t - 2)\hat{j} + (2t^3 - 4t^2)\hat{k}$$

أوجد السرعة والعجلة مقداراً واتجاهاً عند $t = 2$ في كل حالة.

الباب الاول

(6) إذا كان متجه الموضع لجسيم مادي عند لحظة زمنية t يعطي علي الصورة:
 $\vec{r} = a \cos \omega t \hat{i} + b \sin \omega t \hat{j} + ct^2 \hat{k}$ بين أنه علي الرغم من أن مقدار السرعة يزيد مع الزمن، إلا أن مقدار العجلة يظل دائما ثابتا.

(7) يتحرك جسيم في خط مستقيم بعده عن نقطة ثابتة علي الخط هو:
 $x = a \cos(\mu t + \varepsilon)$ اثبت أن عجلته تتناسب مع البعد عن النقطة الأصل، ومتجهة نحوها.

(8) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يتحدد موضعه عند أي لحظة t ثانية بالعلاقة
 $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ سم. عين: (أ) متي تتلاشي السرعة، (ب) المسافة والموضع عندئذ، (ج) العجلة عندئذ أيضا؟

$[t = 5\text{sec}, x(5) = -60\text{cm}, f(5) = 18\text{cm/sec}^2, x(5) - x(0) = -100\text{cm}]$
(9) يتحرك جسيم في مستوي بحيث كان $x = a \cos t, y = a + b \sin t$ حيث a, b ثابتان. أوجد معادلة مسار الجسيم واللحظات التي تكون فيها السرعة موازية لكل من

$$[a^2(y - a)^2 = b^2(a^2 - x^2), \vec{V} \parallel \overrightarrow{ox} \text{ at } t = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \text{ المحورين } ox, oy \\ \vec{V} \parallel \overrightarrow{oy} \text{ at } t = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots]$$

(10) يتعين الإحداثيان الكرتيزيان لجسيم يتحرك علي منحنى بدلالة الزمن بالمعادلتين
 $x = a(1 - \cos nt), y = (nt - \sin nt)$ حيث a, n ثابتان. أوجد مقدار واتجاه سرعة الجسيم، وعجلته عند أية لحظة، ثم ارسم مسار الجسيم من $t = 0$ إلي $t = \frac{2\pi}{n}$.

[المسار هو منحنى الدويري (cycloid)]

(11) إذا كان $\frac{d\vec{r}}{dt} = \sin \omega t \hat{i} + 2t \hat{k}$ ، فاثبت أن:

$$\int (\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}) dt = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{c} \text{ حيث } \vec{c} \text{ متجه ثابت اختياري.}$$

(12) يتحرك جسيم بحيث تكون عجلته $\vec{f} = 2e^{-t}\hat{i} + 5\cos t\hat{j} - 3\sin t\hat{k}$ إذا كان الجسيم موضوعا عند $(1, -3, 2)$ عند اللحظة $t = 0$ ، وكان يتحرك بسرعة $4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. أوجد السرعة والإزاحة عند أي لحظه تالية.

(13) يتحرك جسيم في مستوي بالعجلة $\vec{f} = 3t\hat{i} + 2\hat{j}$ ، فإذا علم أن الجسم بدأ يتحرك من النقطة $(-1, 3)$ بالسرعة الابتدائية $\vec{v}_0 = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ فأوجد معادلة المسار وسرعة الجسيم بعد مضي ثلاث ثوان من لحظة الانطلاق.

(14) أوجد متجهي السرعة والموضع لنقطة مادية تتحرك بمتجه العجلة $\vec{f} = 6t(\hat{i} + 2\hat{j})$ ، إذا بدأت الحركة من الموضع $\vec{r}_0 = \hat{i} - \hat{j}$ بالسرعة $\vec{v}_0 = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ ، وأخري تتحرك بالعجلة $\vec{f} = (5 - 2t)\hat{i}$ بدءا من $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ بالسرعة $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

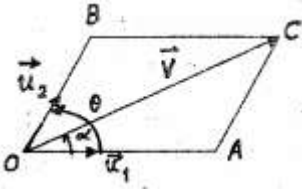
2-1-2-1- تحليل السرعات:

(Composition & Decomposition of Velocities)

1-2-1- متوازي أضلاع السرعات (Parallelogram of Velocities)

إذا اكتسبت نقطة مادية سرعتين - في نفس اللحظة - مختلفتين في المقدار والاتجاه وتمثلهما القطعتان المستقيمتان OA ، OB ولنرمز لهما بالرمزين $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ فإن هاتين السرعتين تكافئان سرعة $\vec{V}$ يمثلها قطر متوازي الأضلاع (OC) المكون من هاتين السرعتين $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ كضلعين متجاورين فيه. بفرض أن الزاوية بين $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ هي θ فإن:

$$V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 \cos \theta \quad (1)$$



ومن العلاقة الأخيرة، نستطيع تحصيل

سرعتين بالسرعة V متي علمنا $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$

والزاوية بينهما θ . وللحصول على زاوية

ميل $\vec{V}$ علي $\vec{u}_1$ ، فبما أن مركبتي السرعة **شكل (1):** متوازي أضلاع السرعات

المحصلة $\vec{V}$ في اتجاه $\vec{OA}$ والاتجاه العمودي عليه هما $u_1 + u_2 \cos \theta$ ، $u_2 \sin \theta$. كما

هو موضح بشكل (1)، وبفرض أن α هي الزاوية بين $\vec{V}$ والسرعة $\vec{u}_1$ ، فإن:

$$\tan \alpha = \frac{u_2 \sin \theta}{u_1 + u_2 \cos \theta} \quad (2)$$

ويمكن استنتاج العلاقة السابقة جبرياً كالتالي:

$$\therefore \vec{u}_1 \cdot \vec{V} = \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$

$$\therefore u_1 V \cos \alpha = u_1^2 + u_1 u_2 \cos \theta \quad (i)$$

$$|\vec{u}_1 \wedge \vec{V}| = |\vec{u}_1 \wedge (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)| = |\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2|$$

$$\therefore u_1 V \sin \alpha = u_1 u_2 \sin \theta \quad (ii)$$

$$\tan \alpha = \frac{u_2 \sin \theta}{u_1 + u_2 \cos \theta} \quad \text{بقسمة (ii) علي (i) فنحصل علي:}$$

حالات خاصة :

1- إذا كانت السرعتان u_1, u_2 متعامدتين، أي $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، فإن: بالتعويض في العلاقتين (1)، (2)

$$V^2 = u_1^2 + u_2^2, \quad \tan \alpha = \frac{u_2}{u_1}$$

تتفق هذه النتيجة مع نظرية فيثاغورث تماماً.

2- إذا كانت السرعتان u_1, u_2 في نفس الاتجاه، أي $\theta = 0$ ، فإن:

$$V = u_1 + u_2, \quad \theta = 0 \therefore \alpha = 0$$

3- إذا كانت السرعتان u_1, u_2 في اتجاهين متضادين؛ أي $\theta = \pi$

$$\therefore V = u_1 - u_2, \quad \alpha = 0 \text{ if } u_1 > u_2$$

$$V = u_2 - u_1, \quad \alpha = \pi \text{ if } u_1 < u_2$$

4- إذا كانت $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ متساويين في المقدار؛ أي $u_1 = u_2$ ، فإن:

$$V^2 = 2u_1^2(1 + \cos \theta) = 4u_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)} = \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2},$$

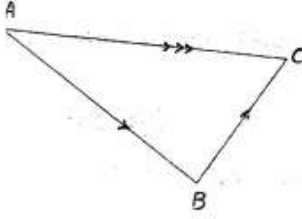
$$\therefore V = 2u_1 \cos(\theta/2), \quad \alpha = \theta/2$$

أي أن محصلة سرعتين متساويتين، كل منهما تساوي u_1 والزاوية بينهما θ تساوي $2u_1 \cos(\theta/2)$ وتعمل في اتجاه منصف الزاوية بينهما.

1-2-2- Triangle of Velocities:

إذا اكتسبت نقطة مادية في نفس اللحظة سرعتين ممثلتين بضلعين في المثلث ABC هما AB, BC في نفس الاتجاه الدوري، فإن محصلتها تمثل بالضلع AC ، وهو الضلع الذي يقفل المثلث في الاتجاه المعاكس؛

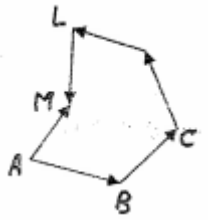
$$\text{أي } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \text{، كما بالشكل المقابل (2).}$$



شكل (2): مثلث السرعات

1-2-3- مضلع السرعات (Polygon of Velocities)

إذا اكتسبت نقطة مادية سرعات ممثلة بالأضلاع $AB, BC, \dots, LM$ لمضلع، مأخوذة وممثلة في اتجاه دوري واحد، فإن محصلتها يمثلها الضلع AM الذي يقفل المضلع في الاتجاه المضاد (كما بالشكل (3) المقابل)، وهذه النتيجة صحيحة لأي



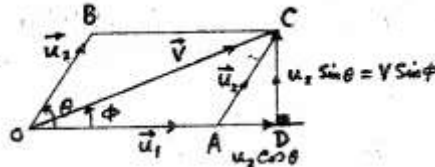
عدد من السرعات الممثلة بأضلاع مضلع مأخوذة في ترتيب دوري واحد؛ أي أن:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dots + \overrightarrow{LM}$$

شكل (3): مضلع السرعات

علاقة متوازي أضلاع السرعات بالزمن:

إذا كان OA يمثل السرعة u_1 ، OB يمثل السرعة u_2 فإن OC يمثل السرعة المحصلة V كما هو موضح بشكل (4).



شكل (4): متوازي أضلاع السرعات

واضح أن الزمن اللازم لقطع المسافة OA بالسرعة u_1 هو نفس الزمن اللازم لقطع المسافة OB بالسرعة u_2 وهو نفس الزمن اللازم لقطع المسافة OC بالسرعة V وهو

الباب الاول

نفس الزمن اللازم لقطع المسافة OD بالسرعة $u_1 + u_2 \cos \theta$ وهو نفس الزمن اللازم لقطع المسافة DC بالسرعة $u_2 \sin \theta$ ؛ أي أن:

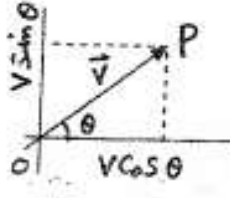
$$\frac{OA}{u_1} = \frac{OB}{u_2} = \frac{OD}{u_1 + u_2 \cos \theta} = \frac{CD}{u_2 \sin \theta}$$

وذلك لأن كلا من هذه الأزمنة يساوي وحدة الزمن؛ وعلي هذا يمكن حساب الزمن في حالة السرعة الثابتة بعدة طرق مختلفة.

1-2-4- تحليل سرعة معلومة في اتجاهين (Resolution of Velocity)

(i) في اتجاهين متعامدين:

مركبتا السرعة $\vec{V}$ في اتجاه يصنع معها زاوية θ والاتجاه العمودي عليه هما: $V \cos \theta$ ، $V \sin \theta$ علي الترتيب كما هو موضح بشكل (5)



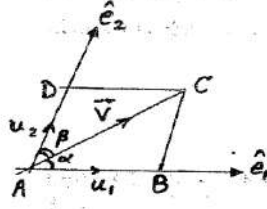
شكل (5): تحليل سرعة في اتجاهين متعامدين

(ii) في اتجاهين مائلين:

نفرض أن الاتجاهين المائلين $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ يصنعان الزاويتين α, β مع السرعة $\vec{V}$ المراد تحليلها كما هو موضح بشكل (6). في هذه الحالة تكون المركبتان هما u_1, u_2 حيث:

$$\therefore \vec{V} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2 \quad (3)$$

$$\therefore \vec{V} \wedge \hat{e}_2 = u_1 \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + u_2 \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2$$



شكل (6): تحليل سرعة في اتجاهين متضادين

بأخذ مقياس الطرفين نجد أن:

$$u_1 = \frac{V \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad (4)$$

بالمثل نحصل علي :

$$u_2 = \frac{V \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \quad (5)$$

حالة خاصة: إذا كان الاتجاهان متعامدين، فإن: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore u_1 = V \cos \alpha, u_2 = V \sin \alpha$$

وبالتالي فإن $V = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ ، $\tan \alpha = u_2 / u_1$ وهذا يتفق مع ما سبق في البند (i) حيث الزاوية α هنا هي نفس الزاوية θ هناك.

مثال (1) يتحرك جسيم بالسرعات 2, 4, 6, 8, $4\sqrt{2}$ والتي تميل على اتجاه بالزوايا

$120^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ علي الترتيب. أوجد مقدار واتجاه السرعة المحصلة.

الحل: ليكن $\overrightarrow{OX}$ الاتجاه المعطي، $\overrightarrow{OY}$ العمودي عليه. فإن مركبات السرعة في اتجاه $\overrightarrow{OX}$ هي:

$$2\cos 30^\circ, 4\sqrt{2}\cos 45^\circ, 6\cos 60^\circ, 8\cos 120^\circ$$

وهي تساوي 4, 3, $\sqrt{3}$ علي الترتيب. و بالمثل، تستطيع حساب مركبات السرعة

في اتجاه $\overrightarrow{OY}$ وهي

$$2\sin 30^\circ, 4\sqrt{2}\sin 45^\circ, 6\sin 60^\circ, 8\sin 120^\circ$$

الباب الاول

وهي تساوي $1, 4, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$ علي الترتيب. ومجموع هذه المركبات يساوي

$$\therefore V_x = \sqrt{3} + 3, V_y = 5 + 7\sqrt{3}$$

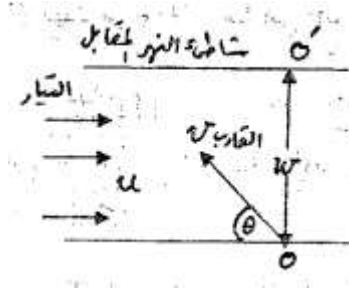
$$\therefore V^2 = V_x^2 + V_y^2 = 315.632 \Rightarrow \therefore V = 17.76$$

وتكون الزاوية التي تميل بها المحصلة علي محور $\overrightarrow{OX}$ هي:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5+7\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}(3.618) \cong 74.5$$

مثال (2) يجدف رجل بقارب ويعبر نهرا عموديا علي اتجاه التيار في زمن قدره t_1 ، ويجدف مسافة مساوية لعرض النهر ضد التيار في زمن قدره t_2 . اثبت أن نسبة سرعته في الماء الساكن إلي سرعة التيار هي: $(t_2^2 + t_1^2)/(t_2^2 - t_1^2)$.

الحل:



بفرض أن سرعة القارب بالنسبة

لمشاهد يتحرك مع التيار هي v ،

شكل (7)

وتصنع زاوية θ مع الجسر ضد التيار وعندئذ تكون للقارب سرعتان في وقت واحد: u في اتجاه التيار (سرعة التيار بالفعل)، v وتصنع زاوية θ مع التيار كما هو موضح بالشكل (7). بالتحليل في اتجاه التيار والعمودي عليه نجد أن $u - v \cos \theta \equiv$ مركبة السرعة في اتجاه التيار، $v \sin \theta \equiv$ مركبة السرعة في الاتجاه العمودي. إذن يستطيع الرجل عبور النهر مباشرة إذا كان $u - v \cos \theta = 0$ ومن ثم $\cos \theta = \frac{u}{v}$. فإذا كان w هو عرض النهر فإن:

الباب الاول

$$\therefore t_1 = \frac{w}{v \sin \theta} = \frac{w}{v \sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{w}{\sqrt{v^2 - v^2 \cos^2 \theta}} = \frac{w}{\sqrt{v^2 - u^2}} \quad (1)$$

والآن عندما يتحرك القارب ضد التيار، أي عندما $\theta = 0$ ، فإن: $v - u \equiv$ مركبة السرعة في اتجاه التيار

$$\therefore t_2 = \frac{w}{v - u} \quad (2)$$

بقسمة (1) علي (2) لنحصل علي:

$$\therefore \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{v - u}{v + u}} \quad \therefore \frac{v}{u} = \frac{t_2^2 + t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}$$

مثال (3) يتحرك تيار بسرعة 3 km/hr في نهر عرضة 440 m ، إذا كان رجل يجدف قارباً بسرعة 5 km/hr . أوجد الاتجاه الذي يجب أن يجدف فيه الرجل قاربه حتي يكون اتجاهه عمودياً علي اتجاه التيار، كذلك أوجد الزمن اللازم لعبور النهر.

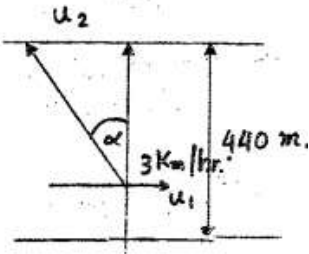
الحل:

باعتبار أن $u_1 = 3$ ، $u_2 = 5$ وحيث

$$\tan \alpha = \frac{u_2 \sin \theta}{u_1 + u_2 \cos \theta} \quad \text{عندما تؤول } \alpha \text{ إلي } \pi/2, \text{ حيث يكون اتجاه القارب}$$

عمودياً على اتجاه التيار كما هو موضح بشكل (8)، نحصل علي:

$$\tan \alpha \rightarrow \infty \therefore u_1 = -u_2 \cos \theta \Rightarrow \therefore \cos \theta = -3/5$$



$$\therefore \cos \theta = -u_1/u_2 = -\sin \alpha = -3/5$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1}(3/5)$$

شكل (8)

الباب الاول

إذن تكون محصلة السرعتين

$$\therefore V = [9 + 25 + 2 \times 3 \times 5(-3/5)]^{\frac{1}{2}} = 4 \text{ km/hr} = 10/9 \text{ m/Sec}$$

و الزمن الذي يستغرقه القارب

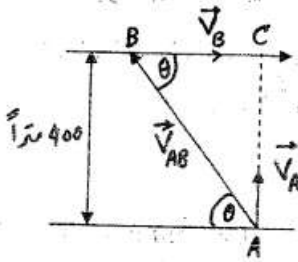
$$\frac{\text{عرض النهر}}{V} = \frac{9}{10} \times 440 = 396 \text{ Sec.} = 6.6 \text{ min}$$

مثال (4): جدف شخص علي قارب بسرعة 4 km/hr في خط مستقيم بعرض نهر ينساب فيه التيار بسرعة 3 km/hr أوجد مقدار واتجاه السرعة المحصلة للقارب. إذا كان عرض النهر 400m احسب المسافة التي يقطعها القارب في اتجاه التيار قبل أن يصل إلي الجانب الآخر، ثم احسب الزمن اللازم لعبور النهر.

الحل: (ملاحظة الموضح بالشكل): إذا كانت سرعة القارب $\vec{V}_A = 4\hat{j}$ ،

وسرعة التيار $\vec{V}_B = 3\hat{i}$ ، فمن مثلث السرعات

ABC (9) يكون:



$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = -3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right), V_{AB} = 5 \text{ km/hr}$$

$$\therefore BC = 400 \cot \theta = 400\left(\frac{3}{4}\right) = 300 \text{ m}$$

شكل (9): مثلث السرعات

$$\text{الزمن اللازم } t = \frac{AB}{V_{AB}} = \frac{AC}{V_A} = \frac{400}{4(1000)} (60)(60) = 360 \text{ sec}$$

تمارين (2-1)

(تحصيل وتحليل السرعات)

(1) أوجد مقدار واتجاه السرعة المحصلة إذا كان:

(i) $u_1 = 3, \quad u_2 = 4, \quad \theta = 30^\circ$

(ii) $u_1 = 10, \quad u_2 = 8, \quad \theta = 45^\circ$

(ii) $u_1 = 4\sqrt{2}, \quad u_2 = 2, \quad \theta = 30^\circ$

(ii) $u_1 = 6, \quad u_2 = 8, \quad \theta = 120^\circ$

(2) جسيم له في آن واحد السرعتان 12m/sec في اتجاه الشرق، 20m/sec في اتجاه 30° شرق الشمال. أوجد مقدار واتجاه السرعة المحصلة.

(3) يعبر قارب بسرعة u نهرا عرضه h وسرعة التيار فيه v . اثبت أن أقصر وقت للعبور يساوي h/u ، وأنه سوف يرسو علي بعد vh/u من النقطة المقابلة للبداية.

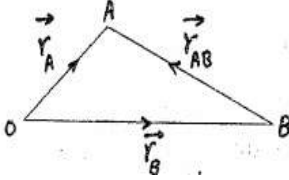
(4) تطير طائرة من A إلي B ثم تعود إلي A ، وإذا كانت سرعتها v وكانت A علي بعد a شرق B . وهبت رياح شمالية شرقية سرعتها $v/5$. فباستخدام مثلث السرعات اثبت أن زمن الرحلة يساوي $35a/12v\sqrt{2}$.

(5) تتحرك عربتان في طريقين يحصران بينهما زاوية α بسرعتين منتظميتين u, v نحو نقطة تقاطع الطريقين O . إذا كان a, b بعدي العربتين عن O عند الابتداء. اثبت أن أقرب بعد بينهما يساوي

$$(av - bu) / \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha}$$

1-3- السرعة النسبية (Relative Velocity)

إذا كان متجهها موضعي جسيمين متحركين A, B في لحظة ما يحدد بالنسبة لنقطة ثابتة O بالمتجهين $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ كما بشكل (1)، فإن موضع الجسيم A بالنسبة للجسيم B يحدده متجه الموضع النسبي $\vec{r}_{AB}$ حيث



شكل (17)

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

وبتفاضله بالنسبة للزمن نجد أن:

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

حيث $\vec{V}_A, \vec{V}_B$

هما متجهي السرعة الفعليان للجسيمين A, B ، وتعرف $\vec{V}_{AB}$ بأنها سرعة A بالنسبة إلى B أما سرعة B بالنسبة إلى A فنحصل عليها من:

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

ومن ذلك نجد أن: $\vec{V}_{AB} = -\vec{V}_{BA}$

أي أن سرعة جسيم ما بالنسبة لآخر تساوي في المقدار وتضاد في الاتجاه سرعة الجسيم الآخر بالنسبة للجسيم الأول.

وللسرعة النسبية معني طبيعي هام حيث تمثل السرعة الظاهرية، أي أنه إذا كان الجسيم A يتحرك بسرعة فعلية $\vec{V}_A$ فإن هذا الجسيم يظهر لجسيم آخر (B) يتحرك بالسرعة الفعلية ($\vec{V}_B$) وكأنه يتحرك بالسرعة $\vec{V}_{AB}$ ؛ لذلك تسمى السرعة النسبية بالسرعة الظاهرية.

ويمكن تعريف متجه السرعة النسبية بأنه (قطر متوازي الأضلاع الذي فيه إحدي السرعتين وعكس الأخرى علي ضلعين متجاورين).

ويمكن إيجاد متجه عجلة نقطة B بالنسبة لنقطة A بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة للزمن حيث

$$\vec{f}_{AB} = \vec{f}_A - \vec{f}_B$$

ويلاحظ أنه إذا كانت السرعة النسبية بين أي نقطتين مثل B, A ثابتة أي كانت النقطة B في حركة منتظمة مع النقطة A فإن متجهي العجلة لكل من النقطتين يكونان متساويين حيث نجد $\vec{f}_{BA} = \vec{0}$. ومن جهة أخرى إذا اعتبرنا النقطة A في حركة منتظمة بالنسبة لنقطة الأصل O فإن المتجه $\vec{V}_A$ يكون ثابتاً، وبالتالي فإن $\vec{f}_A = \vec{0}$ ، ومن ثم فإن $\vec{f}_{BA} = \vec{f}_B$ أي أن متجهي العجلة للنقطة B بالنسبة لنقطتين A, O يكونان متساويين عندما تكون هاتان النقطتان في حركة منتظمة بالنسبة لبعضهما.

لحساب أقرب بعد نثبت الحرف الثاني في السرعة النسبية؛ بأن نضيف سرعة مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه لسرعة الحرف الثاني عند موضع الحرفين، ونسقط عموداً من الحرف الثاني على متجه السرعة النسبية، فيكون طوله هو أقرب بعد. وكذلك زمن الوصول لأقرب بعد يساوي خارج قسمة المسافة النسبية على مقدار السرعة النسبية.

مثال (1): يتحرك جسيم في اتجاه الشرق بسرعة 12 km/hr بينما يتحرك الجسيم الآخر في اتجاه الشمال بسرعة 16 km/hr . أوجد سرعة الجسيم الثاني بالنسبة للأول.

الحل: نفرض أن $\vec{V}_A = 12\hat{i}$ سرعة الجسيم الأول، $\vec{V}_B = 16\hat{j}$ سرعة الجسيم الثاني. فيكون متجه السرعة النسبية

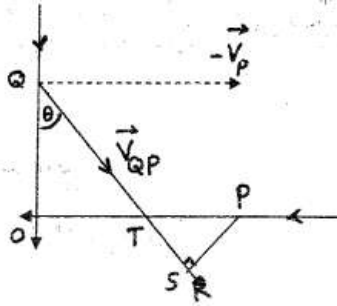
$$\therefore \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = -12\hat{i} + 16\hat{j}$$

ومقداره $V_{BA} = (12^2 + 16^2)^{\frac{1}{2}} = 20 \text{ km/hr}$ ، وتعطى زاوية ميله من العلاقة:

$$\tan \theta = \dot{y} / \dot{x} = -16/12 \therefore \theta = \tan^{-1} \left(-\frac{3}{4} \right)$$

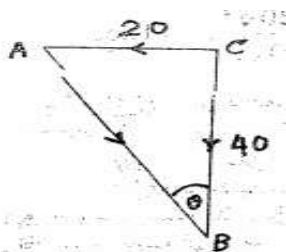
مثال (2): طريقان مستقيمان متعامدان يتقاطعان في نقطة O ، تسير سيارة في أحد الطريقين بسرعة منتظمة مقدارها 20 ms^{-1} متجهة نحو O وتسير أخرى في الطريق الثاني بسرعة منتظمة مقدارها 40 ms^{-1} متجهة نحو O أيضا، وفي لحظة معينة كانت السيارة الأولى علي بعد 300 m من O ، والثانية علي بعد 400 m من O في نفس اللحظة. احسب أقرب مسافة بين السيارتين، وزمن الوصول إليه.

الحل: نفرض أن P, Q (شكل 2) موضعا السيارتين عند اللحظة المعطاة، لذا فإن $OP = 300 \text{ m}$, $OQ = 400 \text{ m}$ وحيث إن المواضع النسبية للسيارة مطلوبة، فسوف نفرض أن تبقي P ساكنة (نثبت P)، ونرسم CA يساوي 20 وحدة طول



شكل (2)

ليمثل سرعة P ، ثم نرسم CB يساوي 40 وحدة طول ليمثل سرعة Q ، وإذن يمثل AB سرعة Q بالنسبة إلى P (أي $\vec{V}_{QP}$) كما هو موضح بشكل (3)، وكذلك نجد



شكل (3)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 20^2 + 40^2$$

$$\therefore AB = 20\sqrt{5} \Rightarrow V_{QP} = 20\sqrt{5} \text{ ms}^{-1}$$

نرسم QR موازيا لـ AB ، إذن يمثل QR مسار Q بالنسبة إلى P ، أو السرعة

النسبية "محصلة $\vec{V}_P, \vec{V}_Q$ ".

الباب الاول

إذن العمود PS يمثل أقرب مسافة بين P ، Q وهو العمود الساقط من نقطة التثبيت علي متجه السرعة النسبية

$$\therefore OT = 400 \tan \theta = 200 \text{ m},$$

$$\therefore TP = 300 - 200 = 100 \text{ m},$$

$$PS = TP \cos \theta = 100 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 40\sqrt{5} \text{ m}.$$

إذن أقرب مسافة بين السيارتين تساوي $40\sqrt{5}$ متراً. و يكون زمن الوصول لهذا المكان

$$\text{مساوياً } t = \frac{QS}{V_{QP}}, \text{ حيث}$$

$$\therefore QS = QT + TS = 200 \sin \theta + 100 \sin \theta$$

$$= (200 + 100) \sin \theta = 300 \sin \theta = 220\sqrt{5} \text{ m}.$$

$$\therefore \vec{V}_Q = -40\hat{j}, \quad \vec{V}_P = -20\hat{i}$$

$$\therefore \underline{V}_{QP} = \underline{V}_Q - \underline{V}_P = 20\hat{i} - 40\hat{j}$$

$$\therefore V_{QP} = 20\sqrt{5} \text{ m s}^{-1}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل. و أخيراً، يكون زمن الوصول لأقرب بعد

$$\text{بين السيارتين } t = \frac{220\sqrt{5}}{20\sqrt{5}} = 11 \text{ sec}.$$

مثال (3): طراد يمكنه أن يسير بسرعة 25 km/hr يطارد سفينة للعدو تسير بسرعة

15 km/hr ، في اتجاه الشمال وكانت علي بعد 40 km إلي الشرق. اثبت بالرسم

والتحليل أن الطراد يمكنه أن يلحق بالسفينة في زمن قدره ساعتان. حدد اتجاه الحركة

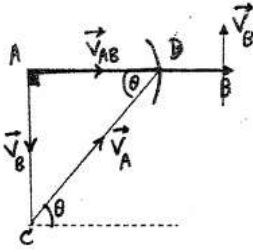
الفعلية للطراد، وموضع تقابله مع السفينة. وإذا سار الطراد في اتجاه الشرق، أوجد

سرعته بالنسبة للسفينة وأوجد أقرب بعد بينهما. اثبت أن الطراد يصل إلي أقرب موضع

في زمن قدره واحد وسبعون دقيقة.

الحل : أولاً - بالرسم:

نفرض أن الطراد A والسفينة B كما هو موضح بشكل (4)، لذا فإن



$$V_B = 15 \text{ km/hr}, V_A = 25 \text{ km/hr}$$

لكي يصل الطراد في أقرب وقت للسفينة

يجب أن يسير في الاتجاه الذي يحقق أن

سرعته بالنسبة للسفينة $\vec{V}_{AB}$ تكون في

شكل (4)

اتجاه المستقيم الواصل بينهما AB ، ولتوضيح

ذلك نستخدم مقياس رسم مناسب للسرعات، وليكن 1:5، ثم نرسم سرعة مساوية في

المقدار ومضادة في الاتجاه لسرعة السفينة B عند كل من A, B ، فيكون AC ممثلاً

للسرعة $\vec{V}_B$ ، وعند C نركز بالفرجار وبفتحة مساوية لسرعة الطراد A نرسم دائرة فنجد

أنها تقطع المسافة بين A و B في نقطة D ، وبقياس AD ، الذي يمثل السرعة النسبية،

والضرب في مقياس الرسم 5 نجد أن:

$$V_{AB} = AD = 4 \times 5 = 20 \text{ km/hr}$$

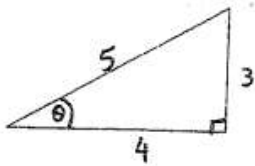
وأيضاً واضح، من المثلث ACD ، أن طول AD يساوي 20 وحدة طول كما في المثال

السابق، وأن AD يمثل السرعة النسبية التي تساوي 20 كم/ساعة. كذلك CD يمثل

اتجاه السرعة الفعلية $\vec{V}_A$ للطراد. والزمن اللازم لكي يلحق بالسفينة هو

$$t = \frac{40}{20} = 2 \text{ hr}$$

ثانياً - بالتحليل:



نفرض أن $\hat{ADC} = \theta$ ، ونطبق قاعدة الجيب لمثلث السرعات

ACD الموضح بشكل (5)، نجد أن:

شكل (5): مثلث السرعات

الباب الاول

$$\frac{V_A}{\sin 90} = \frac{V_B}{\sin \theta} = \frac{V_{AB}}{\sin (90 - \theta)}$$

$$\therefore \frac{25}{1} = \frac{15}{\sin \theta} = \frac{V_{AB}}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \therefore \sin \theta = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

والزاوية θ تحدد اتجاه الحركة الفعلية للطراد

$$\therefore V_{AB} = 25 \cos \theta = 25 \left(\frac{4}{5} \right) = 20 \text{ km / hr}$$

$$\cdot t = \frac{AB}{\|\vec{V}_{AB}\|} = 20 / 20 = 1 \text{ hr} \text{ ويلحق الطراد بالسفينة في زمن قدره}$$

والآن إذا سار الطراد في اتجاه الشرق لتحديد اتجاه الحركة النسبية ($\vec{V}_{AB}$)، ولتعيين

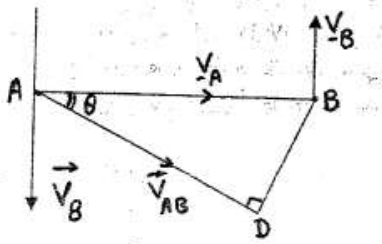
أقرب بعد بين الطراد والسفينة نثبت

السفينة B (أي الحرف الثاني من السرعة

النسبية) وذلك بأن نضيف سرعة مساوية

في المقدار ومضادة في الاتجاه لسرعة B

عند كل من A, B ثم نسقط عموداً من B



شكل (6)

(نقطة التثبيت) على متجه السرعة النسبية $\vec{V}_{AB}$ فيكون هو أقرب بعد (كما هو موضح

بشكل 22).

$$\therefore \underline{V}_A = 25\hat{i}, \underline{V}_B = 15\hat{j}, \therefore \vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B = 25\hat{i} - 15\hat{j}$$

$$\therefore V_{AB} = \sqrt{25^2 + 15^2} = 5\sqrt{34} \text{ km / hr},$$

$$\tan \theta = -15/25 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-3/5).$$

أقرب بعد هو BD

$$BD = AB \sin \theta = 40 \sin \theta = 40 \times \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{120}{\sqrt{34}} \text{ km}$$

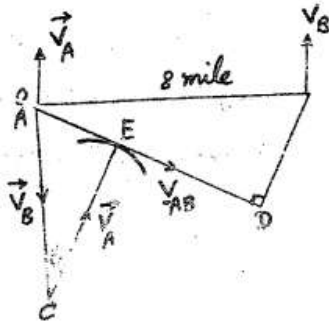
$$\therefore AD = 40 \cos \theta = \frac{200}{\sqrt{34}} \text{ km}$$

$$\text{زمن الوصول لأقرب بعد} = \frac{AD}{V_{AB}} = \frac{200(60)}{\sqrt{34}(5\sqrt{34})} \cong 71 \text{ min}$$

مثال (4): طراد بحري يمكنه أن يسير بسرعة 15 عقدة، شاهد سفينة حربية للعدو علي بعد (ميل بحري) 8 N.M في اتجاه الشرق منه. فإذا كانت السفينة تتجه شمالا بسرعة 20 عقدة، فأوجد الاتجاه الذي يجب أن يسير فيه الطراد حتي يكون أقرب ما يمكن من السفينة، وأوجد أقرب بعد بينهما وزمن الوصول إليه.

الحل:

نفرض أن الطراد A والسفينة الحربية B , $V_A = 15 \text{ knots}$, $V_B = 20 \text{ knots}$, باستخدام مقياس رسم مناسب للسرعات 5:1، وعند O نرسم ممثلا لسرعة السفينة وفي الاتجاه المضاد، ونركز



بالفرجار عند C وبفتحة مناسبة ومساوية لسرعة الطراد نرسم دائرة، فيكون المماس لهذه الدائرة عند E ممثلا لمتجه السرعة النسبية $\vec{V}_{AB}$ كما هو موضح بشكل (7).

ولإيجاد أقرب بعد نسقط عمودا من B على

شكل (7)

متجه السرعة النسبية فيقابلة في D . ولكي يكون BD أقرب بعد لابد أن تكون الزاوية $\hat{EOB}$ أقل ما يمكن، ويحدث ذلك عندما تكون زاوية $\hat{COE}$ أكبر ما يمكن؛ أي عندما

الباب الاول

يكون OD مماسا للدائرة التي نصف قطرها V_A . وبقياس OE والضرب في مقياس الرسم نحصل علي قيمة السرعة النسبية. الاتجاه الذي يجب أن يسير فيه الطراد يتعين من:

$$\cos\theta = 15/20 = 3/4$$

$$V_{AB} = OE = \sqrt{20^2 - 15^2} = 5\sqrt{7} \text{ knots}$$

ويكون أقرب بعد بين الطراد والسفينة هو BD ، حيث:

$$BD = OB \sin\theta = 8(\sqrt{7}/4) = 2\sqrt{7} \text{ N.M}$$

ولكي يصل الطراد إلي أقرب بعد من السفينة، فيجب أن يقطع مسافة ظاهرية بالنسبة لمشاهد علي السفينة، مقدارها OD ، وبسرعة ظاهرية أيضا مقدارها V_{AB} ، حيث

$$OD = OB \cos\theta = 8\left(\frac{3}{4}\right) = 6 \text{ N.M}$$

لذا فإن زمن الوصول لأقرب بعد بين الطراد والسفينة هو:

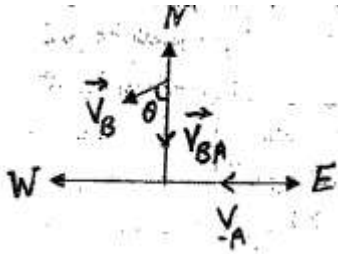
$$\therefore t = OD/V_{AB} = 6/5\sqrt{7} \text{ hr}$$

مثال (5): يظهر المطر كما لو كان يسقط رأسيا بالنسبة لرجل يسير بمعدل 2 mil/hr ،

وعندما تزداد سرعته إلي 4 mil/hr يظهر كما لو كان سيقابله في اتجاه يصنع زاوية 45°

مع الرأسى. أوجد الاتجاه والقيمة الحقيقية لسرعة

المطر.



الحل : أولا (انظر شكل 8)

نفرض أن الرجل A والمطر B

$$\vec{V}_B \equiv \text{سرعة المطر} = -V_B(\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j})$$

$$\vec{V}_A \equiv \text{سرعة الرجل} = -2\hat{i}$$

$$\vec{V}_{BA} \equiv \text{السرعة النسبية} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

شكل (8)

الباب الاول

$$\begin{aligned}\therefore -V_{BA} \hat{j} &= -V_B (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) + 2\hat{i} \\ &= (2 - V_B \sin \theta) \hat{i} - V_B \cos \theta \hat{j}\end{aligned}$$

حيث θ هي زاوية ميل سرعة المطر $\vec{V}_B$ مع الرأسى. وبمساواة مركبات $\hat{i}$, $\hat{j}$ في طرفي المعادلة الأخيرة، نجد أن:

(1)

$$\therefore 0 = 2 - V_B \sin \theta, V_{BA} = V_B \cos \theta$$

ثانياً - من الشكل (9) نجد أن:

$$\therefore \vec{V}_A = -4\hat{i}, \vec{V}_B = -V_B (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j})$$

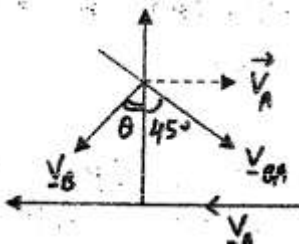
$$\vec{V}_{BA} = V_{BA} \cos 45^\circ \hat{i} - V_{BA} \sin 45^\circ \hat{j} = \frac{V_{BA}}{\sqrt{2}} (\hat{i} - \hat{j}) \quad (2)$$

$$\therefore \vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = (4 - V_B \sin \theta) \hat{i} - V_B \cos \theta \hat{j} \quad (2)'$$

وحيث إن اتجاه السرعة النسبية يصنع

زاوية 45° مع الرأسى، إذن بمقارنة

المعادلة (2) بالمعادلة (2)':



$$\therefore -\tan 45^\circ = \frac{4 - V_B \sin \theta}{-V_B \cos \theta} = \frac{V_{BA} / \sqrt{2}}{-V_{BA} / \sqrt{2}} = -1$$

$$\therefore V_B \cos \theta = 4 - V_B \sin \theta \quad (3)$$

شكل (9)

من (1) و (3)، فإن $V_B \sin \theta = 2$, $V_B \cos \theta = 2$ وبالقسمة نحصل على

$\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$. إذن اتجاه السرعة الفعلية للمطر يصنع الزاوية 45° مع

الرأسى. بالتربيع والجمع نحصل على السرعة الحقيقية للمطر

$$V_B^2 = 8 \Rightarrow V_B = 2\sqrt{2} \text{ mil/hr}$$

مثال (6): طراد يمكنه أن يسير بسرعة 50 ميل/ساعة، وهناك باخرة للعدو علي بعد 20 ميلا إلى الشرق من الطراد، فإذا كانت الباخرة تتجه شمالا بسرعة 30 ميل/ساعة. اثبت أن الطراد يمكنه أن يصل إلي الباخرة في نصف ساعة، وعين الاتجاه الذي يجب أن يسلكه الطراد حتي يصل إلي الباخرة.

الحل: سنناقش حل هذه المثال بثلاث طرق.

الطريقة الأولى: ندرس المسألة من وجهة نظر مشاهد علي أحد السفينتين وليكن مثلاً علي الباخرة. لكي يلحق الطراد B بالباخرة A يجب أن يتحرك بحيث يري المشاهد الطراد متجها نحوه طول الوقت، أي أن سرعة الطراد بالنسبة للمشاهد يجب أن تكون في اتجاه الشرق $\hat{i}$ $V_{BA} = V_{BA} \hat{i}$. وبفرض أن الطراد يتوجه بحيث تميل سرعته علي اتجاه الشرق بزاوية θ

$$\therefore 50(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) - 30\hat{j} = V_{BA}\hat{i}$$

وهذه المعادلة الاتجاهية تكافئ معادلتين قياسيتين، هما

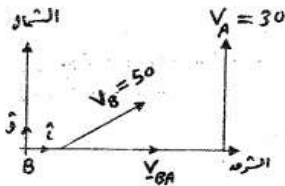
$$\therefore 50\cos\theta = V_{BA} \quad (1)$$

$$50\sin\theta - 30 = 0 \quad (2)$$

من المعادلة (2) نجد أن $\theta = \sin^{-1}(3/5)$ ، وبالتعويض في المعادلة (1) فإن

$V_{BA} = 40 \text{ mil/hr}$ وفي لحظة لحاق الطراد بالباخرة سيكون من وجهة نظر المشاهد أنه

قد قطع مسافة 20 ميلاً التي كانت تفصلهما في البداية بسرعة 40 ميل/ساعة (شكل



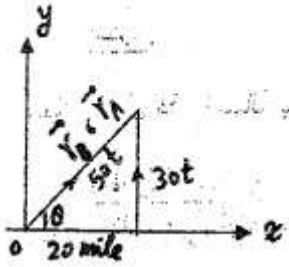
(10)

شكل (10)

ومن هنا ينتج أن زمن الوصول يكون $\frac{20}{40} = \frac{1}{2} \text{ hr}$.

الباب الاول

الطريقة الثانية: إذا اعتبرنا السرعات المطلقة للجسمين، أي إذا درسنا المسألة من وجهة نظر شخص ساكن في المستوي، هذا الشخص يشاهد الحركات المطلقة للجسمين، ولما كان كل منهما يتحرك بسرعة منتظمة فإن هذا المشاهد يمكنه أن يعبر عن متجهي موضعيهما بأن يأخذ نقطة أصل الإحداثيات مثلا عند الوضع الابتدائي للطراد (شكل 11)، وبذلك يكون:



$$\vec{r}_A = 20\hat{i} + 30t\hat{j}, \quad \vec{r}_B = 50t(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

لكي يلحق الطراد بالباخرة يجب أن يصلا إلي نفس المستوي في نفس اللحظة؛ أي أن يتساوى متجهها

شكل (11)

موضعيهما عند تلك اللحظة؛ أي $\underline{r}_A = \underline{r}_B$

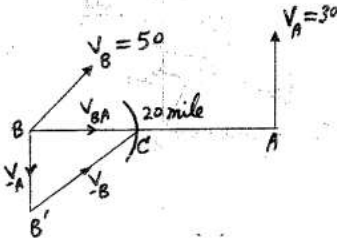
$$\therefore 30t = 50t \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = 3/5$$

$$\therefore 20 = 50t \cos\theta = 50 \cdot \frac{4}{5}t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ hr}$$

الطريقة الثالثة: (بالرسم) نفرض أن الطراد عند نقطة B، وأن السفينة عند النقطة A، وبذلك يكون BA طوله يمثل 20 mil بمقياس رسم معين كما هو موضح بشكل (12).

في هذا المثال يوجه قائد الطراد نفسه

في اتجاه ما بحيث يصل إلي السفينة في أقرب وقت. هذا الاتجاه يحقق أن سرعة الطراد بالنسبة للسفينة يجب أن تكون في اتجاه المستقيم الواصل بينهما، كما في



شكل (12)

الطريقة الأولى.

وحتى تتفهم هذه الحقيقة، نفترض إضافة السرعة $\underline{V}_A$ - إلي كل من الطراد والسفينة، فتسكن السفينة بينما يتحرك الطراد بالسرعة النسبية للسفينة $\underline{V}_{BA}$ ، وهذه يجب أن تكون في اتجاه BA . نرسم من B مستقيماً يوازي $\underline{V}_B$ وبمقياس رسم مناسب للسرعات طوله يمثل قيمة سرعة الطراد V_B ، فتقطع الدائرة التي مركزها B المسافة BA في نقطة C فيمثل $B'C$ سرعة الطراد الحقيقية و يمثل BC سرعة الطراد بالنسبة للسفينة.

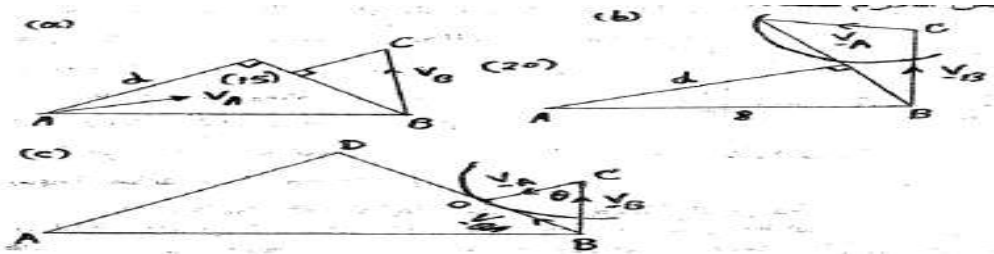
نقيس BC ثم نضربه في مقياس رسم السرعات نجده يساوي 40 mil/hr ، و

$$t = \frac{BA}{V_{BA}} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \text{ hr}$$

ملاحظة: إذا لم يقطع محيط الدائرة المستقيم الواصل بين الطراد والسفينة فلا يلحق الطراد بالسفينة، كما في المثال التالي.

مثال (7): تبحر سفينة شمالاً بسرعة 20 ميل/س، فإذا شاهدها سفينة حربية يمكنها الحركة بسرعة 15 ميل/س، في لحظة كانت فيها السفينة الأخيرة علي مسافة 8 ميل إلي الغرب من الأولي، فأوجد الاتجاه الذي يجب أن تتحرك فيه السفينة الحربية حتي تكون علي أقرب مسافة ممكنة من السفينة الأولي، وأوجد هذه المسافة والزمن اللازم لذلك.

الحل:



شكل (13)

الباب الاول

إذا درسنا المسألة من وجهة نظر مشاهد علي السفينة الحربية A ، فإن هذا المشاهد يرى أن B تتحرك بسرعة $\underline{V}_{BA}$ بالنسبة له، حيث $\underline{V}_{BA} = \underline{V}_B - \underline{V}_A$ ولكي نمثل هذا المتجه هندسياً، فإننا نحمل المتجه $-\underline{V}_A$ علي النقطة C (نهاية المتجه $\underline{V}_B$)، ولما كان المتجه محددًا تمامًا (مقدارًا واتجاهًا)، بينما $\underline{V}_A$ معلوم المقدار فقط، فإن نهاية $\underline{V}_{BA}$ تقع، مهما كان اتجاه $\underline{V}_A$ ، علي محيط دائرة نصف قطرها $V_A = 15$ ، ومركزها النقطة C شكل (13) (a, b) . ونلاحظ أن أي اتجاه للسرعة $\underline{V}_A$ تناظره مسافة عمودية معينة بين نقطة A ومتجه السرعة النسبية، وهذه المسافة هي أقرب بعد بين السفينتين إذا تحركت A في الاتجاه المعطي. من الشكل 30 نلاحظ بسهولة أن أقل قيمة للمسافة d ، وسنرمز لها بالرمز d_m بحيث إذا سلكت A اتجاهًا معينًا، بحيث يكون متجه السرعة النسبية مماسًا للدائرة السابقة من الجهة الغربية من نقطة A ، وفي هذا الوضع يكون المتجه $-\underline{V}_A$ في الاتجاه من مركز الدائرة إلي نقطة التماس. من ذلك يتضح أن شرط وصول السفينتين إلي أقرب مسافة ممكنة بينهما هو أن تتعاود السرعة النسبية للجسمين علي $\underline{V}_A$ ؛ أي أن:

$$\therefore (\underline{V}_B - \underline{V}_A) \cdot \underline{V}_A = 0 \Rightarrow \underline{V}_B \cdot \underline{V}_A - V_A^2 = 0$$

بفرض أن الزاوية بين $\underline{V}_A, \underline{V}_B$ هي θ ، فيكون

$$\therefore V_A V_B \cos \theta - V_A^2 = 0$$

$$\therefore \cos \theta = V_A / V_B = 15 / 20 = 3 / 4$$

وبذلك تكون أقرب مسافة ممكنة هي

$$d_m = 8 \sin \theta = 8 \sqrt{7} / 4 = 2\sqrt{7} \text{ miles}$$

ولحساب الزمن الذي تصلان عنده لأقرب مسافة ممكنة بينهما نحسب المسافة التي تتحركها B من وجهة A حتي تصل إلي نقطة التقاطع من الرسم (a, b) 29. نجد أن

$$\therefore S = 8 \cos \theta = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6 \text{ miles} \quad \text{هذه المسافة:}$$

الباب الاول

ويري A كذلك أن B تتحرك هذه المسافة بالسرعة $\vec{V}_{BA}$ حيث

$$V_{BA} = \sqrt{20^2 - 15^2} = 5\sqrt{7} \text{ mil/hr}$$

أي أنها تصل إلي الوضع المطلوب في زمن

$$t = 8/V_{BA} = 6/5\sqrt{7} \text{ hr}$$

وبالرسم يمكن حساب أقل مسافة بينهما، وذلك بقياس المسافة AD وحساب ما تمثله هذه

المسافة من طول. وكذلك نقيس المسافة BO فهي تمثل السرعة $\vec{V}_{BA}$ ، كذلك نقيس

المسافة BD فهي تمثل المسافة المقطوعة بالسرعة النسبية $\vec{V}_{BA}$ حتي تصل إلي أقصر

بعد، ويكون: $\frac{BD}{V_{BA}} \equiv \text{زمن الوصول لأقرب بعد.}$

تمارين (3-1)

(السرعة النسبية)

(1) إذا كان متجها الموضع لجسمين يعطيان من:

$$\vec{r}_1 = t\hat{i} - t^2\hat{j} + (2t+3)\hat{k}, \quad \vec{r}_2 = (2t-3t^2)\hat{i} + 4t\hat{j} - t^3\hat{k}$$

فأوجد سرعة الجسم الثاني بالنسبة للأول عند $t=1$ ، وكذلك عجلة الثاني بالنسبة للأول.

(2) يسير قارب في نهر عرضه 400 ft بسرعة 4 mil/h ، وفي اتجاه عمودي علي اتجاه التيار الذي يتدفق بسرعة 3 mil/h . أوجد الموضع الذي يرسو فيه القارب علي الضفة الأخرى [300 ft من النقطة المقابلة للبداية].

(3) شخصان يسبحان في نهر عرضه 378 م وسرعة التيار 15 م/ث وسرعة كل من الشخصين 39 م/ث ، الأول يعبر النهر في اتجاه عمودي علي التيار ويعود إلي نقطة البداية مرة أخرى، والثاني يتحرك لمسافة تساوي عرض النهر مع التيار ويعود ضده لنقطة البداية. أي من السباحين يعود أولاً إلي نقطة البداية إذا بدءا في نفس اللحظة؟

(4) نهر عرضه $\frac{1}{12} \text{ كم}$ ويسبح فيه سباح بسرعة 5 كم/س . أوجد الاتجاه الذي يجب أن يسبح فيه السباح حتي يعبر النهر في الاتجاه العمودي علي التيار الذي سرعته 3 كم/س ، وأوجد الزمن الذي يستغرقه حتي يعبر النهر.

(5) يسير قطار بسرعة 60 كم/س نحو الشمال، شاهد أحد ركابه طائرة متجهة نحو الشرق، وعندما غادر القطار شاهد أن الطائرة متجهة بزاوية 30° شمال الشرق. فإذا كانت الطائرة تسير دائماً في مستوى أفقي، فأوجد سرعتها الحقيقية.

(6) يسير راكب دراجة شمالاً بسرعة 12 كم/س ، لاحظ أن الرياح تهب من زاوية 60° شرق الشمال، وعندما أوقف دراجته لاحظ أن الرياح تهب من زاوية 60° شمال الشرق.

اثبت أن سرعة الرياح الفعلية $20\sqrt{3}$ كم/س، وإذا عكس الراكب اتجاه حركته فأوجد اتجاه هبوب الرياح.

(7) يتحرك قطاران علي خطين حديديين متعامدين؛ أحدهما بسرعة 20 كم/س والآخر بسرعة 50 كم/س. أوجد سرعة القطار الأول بالنسبة إلي القطار الثاني.

(8) تبخر باخرتان، الأولي في اتجاه الشرق بسرعة 12 كم/س والثانية في اتجاه الشمال بسرعة 16 كم/س. أوجد سرعة الأولي بالنسبة للثانية والعكس.

(9) تتحرك سفينة بسرعة 15 عقدة في اتجاه الشمال الشرقي، وتبدو سفينة أخرى لمشاهد علي السفينة الأولي متحركة شرقا بسرعة 5 عقدات. أوجد السرعة الحقيقية والاتجاه الذي تتحرك فيه السفينة الثانية.

(10) تبخر باخرة في اتجاه الغرب بسرعة 14 كم/س، وتبدو سرعة الرياح من علي متن الباخرة أنها تهب بسرعة 7 كم/س من الشمال الغربي. أوجد سرعة الرياح الحقيقية واتجاهها.

(11) تتحرك غواصة نحو الشرق بسرعة 8 كم/س بينما تتجه مدمرة شمالا بسرعة 12 كم/س. أوجد مقدار واتجاه سرعة الغواصة بالنسبة لراكب في المدمرة.

(12) يجري رجل شرقا بسرعة 8 كم/س فوجد أن الرياح تهب عليه من الشمال وعندما ضاعف من سرعته وجد أن الرياح تهب عليه من الشمال الشرقي. أوجد سرعة الرياح.

$$[8\sqrt{2} \text{ km/hr}, \theta = 135^\circ]$$

(13) لاحظ سائق سيارة تسير بمعدل 52 كم/س في اتجاه الشمال الشرقي أن الرياح تظهر كأنها قادمة من الشمال الغربي، وعندما يسير في اتجاه الجنوب الشرقي بمعدل 60 km/hr تظهر الرياح وكأنها قادمة من اتجاه يصنع 60° شمال الغرب. أوجد

$$\text{سرعة الرياح بالنسبة للسيارة. } \left[\frac{16}{2-\sqrt{2}} \text{ كم/س} \right]$$

(14) تتحرك نقطة مادية A في اتجاه الشرق بسرعة مقدارها 15 كم/س وتتحرك النقطة

B في اتجاه يصنع 60° جنوب الشرق بسرعة مقدارها 20 كم/س. أوجد سرعة A

بالنسبة لـ B وسرعة B بالنسبة لـ A . $[2\sqrt{3}t_g^{-1}, \sqrt{325}]$ كم/س

(15) تسير باخرة جنوبا بسرعة $15\sqrt{2}$ كم/س، وتسير أخرى في اتجاه جنوب الشرق

بسرعة 15 كم/س. أوجد مقدار واتجاه سرعة الباخرة الأولى بالنسبة لراكب في الثانية.

(16) تسقط قطرات المطر بسرعة $\frac{75}{11}$ كم/س، إذا هبت الرياح شمالية بسرعة 12

كم/س، أوجد الاتجاه الذي تبدو قطرات المطر أنها تسقط منه بالنسبة لشخص يسير

بسرعة 3 كم/س في اتجاه الشمال. بأي سرعة تصل قطرات المطر للشخص؟

(17) شخص يحمل بندقية ويركب قطارا يتحرك بالسرعة 32 كم/س ويريد أن يطلق

رصاصة علي هدف يتحرك بعيدا عن القطار في اتجاه عمودي علي القطار بسرعة 24

كم/س. إذا كان الخط الواصل بين الرجل والهدف يصنع زاوية 30° مع القطار لحظة

الإطلاق، فبأي زاوية يجب أن يوجه الرجل بندقيته حتي يصيب الهدف، علما بان

البندقية تطلق الرصاصة بسرعة 450 كم/س؟

(18) رجلان A ، B البعد بينهما $\frac{1}{2}$ كم، حيث A يقع شرق B ، فإذا كان A يتجه

شمالا بسرعة 3 كم/س، بينما B يجري بسرعة 6 كم/س ليلحق بالرجل A ، أوجد

الاتجاه الذي يسلكه B والزمن الذي يستغرقه حتي يلحق به.

(19) سفينتان تتركان الميناء في وقت واحد؛ الأولى تتجه شمال الشرق بسرعة 20

كم/س، والثانية تبخر في اتجاه يصنع زاوية 45° جنوب الغرب بالسرعة 15 كم/س.

أوجد سرعة الثانية بالنسبة للأولى، ثم أوجد متي تكون السفينتان علي بعد 100 كم من

بعضهما.

(20) شاهدت مدمرة حربية تسير بسرعة 20 كم/س سفينة للعدو علي بعد 10 كم شرقا، وكانت السفينة تتحرك شمالا بسرعة 30 كم/س. عين الاتجاه الذي يجب أن تسلكه المدمرة حتي تكون المسافة بينهما أقل ما يمكن، وعين أقل مسافة والزمن اللازم للوصول لها.

(21) سفينة A تسير شرقا بسرعة 8 م/ث، شاهدت سفينة B في اتجاه 30° شرق الشمال، وعلي بعد 5000 م تسير جنوبا بسرعة 6 م/ث. بين بالرسم مسار B بالنسبة لـ A. وأوجد من الرسم أقصر بعد بينهما والزمن الذي يمضي لتكون أقرب ما يكون من A. تحقق من صحة إجابتك بالحساب (حيث $\sqrt{3} = 1.732$). (22) إذا كانت سرعة طلاقات مدفع موضوع فوق سفينة واقعة عند الشاطئ هي 750 كم/س، ويوجد طراد علي بعد $\sqrt{14}$ كم شمالا ويتحرك شرقا بسرعة 50 كم/س، أوجد الاتجاه الذي يجب أن تأخذه طلاقات المدفع لكي تصيب الطراد، وأوجد الزمن الذي تستغرقه الطلقة من لحظة إطلاقها حتي أصابها الطراد. وإذا أبجرت السفينة بسرعة 35 كم/س لكي تكون أقرب ما يمكن من الطراد، وأوجد الاتجاه الذي يجب أن تبخر فيه السفينة وأقرب مسافة بينهما.

(22) تستطيع مدمرة أن تسير بسرعة 30 كم/س، فإذا كانت هناك باخرة تسير شمالا بسرعة 20 كم/س، وكانت تبعد عن المدمرة مسافة 10 كم في اتجاه يصنع 30° مع الشمال الغربي، فاحسب أقل زمن يمكن أن تلحق فيه المدمرة بالباخرة.

(23) AC, BC طريقان يلتقيان في C بحيث كان $\hat{ACB} = 60^\circ$ ، فإذا سارت سيارة علي كل طريق بسرعة 12 كم/س، وفي لحظة ما كان $AC = \frac{3}{2}$ كم، فأوجد أقصر مسافة بين السيارتين، وأوجد الزمن اللازم ليكونا عند هذه المسافة.

قوانين نيوتن للحركة

في الباب السابق درسنا الحركة دون اعتبار لمسبباتها. أما الآن فسنهتم ببحث العلاقة بين حركة الأجسام وأسبابها، آخذين في الاعتبار تأثير القوي والقصور الذاتي لهذه الأجسام.

القوة (Force): هي ذلك المؤثر الخارجي الذي يغير أو يحاول تغيير حالة الجسم من سكون أو حركة منتظمة في خط مستقيم.

كمية الحركة الخطية (Linear Momentum):

هي حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته، وإذا عبرنا عن الكتلة بالرمز m والسرعة بالرمز $\vec{V}$ ، وكمية الحركة بالرمز $\vec{p}$ ، فإن: $\vec{p} = m\vec{V}$.

قوانين نيوتن للحركة (Newton's Laws of Motion):

وهي تبحث العلاقة بين القوي المؤثرة علي جسم ما وحركته الناتجة عن تأثير هذه القوي. وكان العالم إسحاق نيوتن هو أول من صاغها في شكل رياضي، ونشرت عام 1686 م.

القانون الأول (قانون القصور الذاتي Inertia):

وقد اكتشفه جاليليو جاليلي عام 1638م وينص علي: "كل جسم يبقي علي حالته من السكون أو الحركة المنتظمة في خط مستقيم - ما لم تؤثر عليه أي قوة خارجية تغير من حالته". ويمكن وضع القانون الأول علي الصورة

$$\vec{P} = constant$$

القانون الثاني (القانون الأساسي للديناميكا Fundamental Law):

معدل التغير في كمية الحركة يتناسب مع القوة المؤثرة، ويكون التغير في اتجاه القوة.

الباب الثاني

من قانون نيوتن الأول يتضح أن أي تغير في سرعة جسم، إنما ينشأ عن تأثير قوة. أما قانون نيوتن الثاني يبين العلاقة التي تربط بين القوة المؤثرة وما ينتج عنها من تغير في السرعة.

فإذا كانت $\vec{F}$ هي القوة المؤثرة علي جسم كتلته m فتحرك بعجلة $\vec{f}$ ، إذن من قانون نيوتن الثاني نجد أن:

$$\vec{F} = k \frac{d}{dt} \vec{p} = k \frac{d}{dt} (m\vec{V}) = k m \vec{f}; \quad m = \text{constant}$$

حيث k ثابت التناسب، ومن المناسب اختيار وحدة القوة بحيث تجعل الثابت $k = 1$ ؛ أنه يجب أن يكون $f = 1$ ، $m = 1$ عندما $F = 1$. إذن تكون المعادلة الأساسية للحركة على الصورة:

$$\vec{F} = m\vec{f}$$

ونلاحظ أن العجلة $\vec{f}$ في نفس اتجاه القوة $\vec{F}$ ، وإذا كانت $\vec{F} = \vec{0}$ ، فإن $\vec{f} = \vec{0}$. أما إذا كانت الكتلة m تتغير مع الزمن، فإن:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}) = \vec{V} \frac{dm}{dt} + m\vec{f}$$

الاستقلال الطبيعي للقوي (Natural Independence of Forces):

نفرض أن القوة $\vec{F}_1$ تؤثر علي جسم كتلته m وتنتج عجلة $\vec{f}_1$ فإن $m\vec{f}_1 = \vec{F}_1$ ، وبالمثل القوة المضافة $\vec{F}_2$ تؤثر علي نفس الجسم وتنتج عجلة إضافية $\vec{f}_2$ كما لو كانت تؤثر بمفردها علي الجسم، فإن $m\vec{f}_2 = \vec{F}_2$

$$\therefore m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

وهذا يوضح أن $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ تؤثر علي الجسم وتنتج عجلة محصلة $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$.

وزن الجسم: "هو قوة جذب الأرض للجسم"

فإذا كان لدينا جسم كتلته m يكون وزنه W عبارة عن قوة جذب الأرض عليه، ومعلوم أن هذه القوة تكسب الجسم عجلة g ؛ تسمى عجلة الجاذبية الأرضية، أو عجلة السقوط الحر، ومن القانون الثاني نجد أن $m = W/g$. ويتغير وزن الجسم كالمقدار g بتغير مكانه وبعده عن سطح البحر.

القانون الثالث: (الفعل ورد الفعل (Action and Reaction):

"تؤثر النقطتان الماديتان كل منهما علي الأخرى بقوتين متساويتين في المقدار ومتجهتين علي امتداد المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين في اتجاهين متضادين"

قانون الجذب الكوني (Universal Gravitation Law):

بالإضافة إلي قوانين حركة الجسيم فإن نيوتن كذلك قد وضع القانون الذي يحكم الجذب المتبادل (Mutual Attraction) بين الأجسام وقوي الجذب؛ وهي أبسط أنواع القوي بين الجسيمات المادية، وتعرف بقوي الثقائل، والصيغة الرياضية لهذا القانون - والذي يعرف بقانون التربيع العكسي - هي $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ حيث F هي مقدار قوة الجذب المتبادل بين جسمين كتليتهما m_1, m_2 ، المسافة بين الجسمين، G ثابت عام يعرف بثابت الجذب. لاحظ أن هناك قوتين، مقدار كل منهما F ، الأولي يؤثر بها الجسيم m_1 في الجسيم m_2 والأخرى يؤثر بها الجسيم m_2 في الجسيم m_1 ، وهاتان القوتان خاضعتان لقانون نيوتن الثالث.

الوحدات المطلقة (Absolute Units):

1- في النظام الإنجليزي:

وحدة الكتلة: الباوند (Lb)(Pound)

وحدة العجلة: قدم / ثانية² (ft/sec.²)

وحدة القوة: الباوندال (Pdl)(Poundal)

2 - في النظام الفرنسي:

وحدة الكتلة: الجرام (gr)(gram)

وحدة العجلة: سم/ث² (cm/sec.²) أو cm.sec⁻²

وحدة القوة: الداين (Dyne)

3 - في النظام العالمي:

وحدة الكتلة: الكيلو جرام (كجم)(kg)

وحدة الطول: المتر (m)

وحدة الزمن: الثانية (ث) (sec)

وحدة القوة: النيوتن (N)(Newton)

$$F(N) = m(kg)f(m \cdot sec^{-2}) \quad \text{أي أن}$$

الوحدات الهندسية "التثاقلية":

وحدات القوة السابقة (الباوندال والداين) تعتبر صغيرة للقياسات العملية. لذلك

تستعمل في الحياة العملية وحدات أكبر، هي وزن الباوند (lb - wt) كوحدة في

النظام الإنجليزي، ووزن الكيلو جرام (kg - wt) في النظام الفرنسي.

وزن الباوند هو قوة جذب الأرض لكتلة مقدارها باوند واحد؛ أي أن وزن الباوند يكافئ 32 باوندال.

وزن الجرام هو قوة جذب الأرض لكتلة مقدارها جرام واحد؛ أي أن:

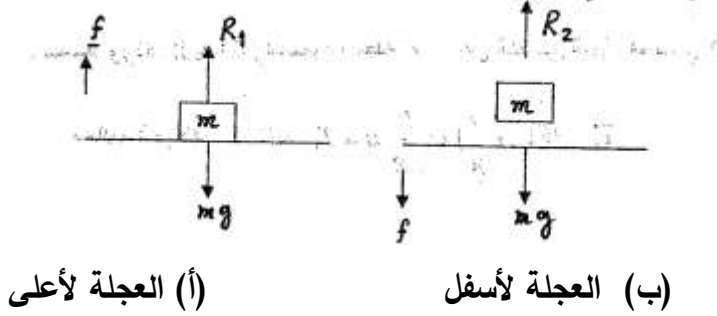
$$\therefore 1gr - wt = 1 \times g = 980 \text{ dyne}$$

$$\text{وزن الجرام (1000)} = \text{وزن كجم} = 1000(980) \text{ dyne}$$

تطبيقات على قوانين الحركة:

والآن نستعرض بعض الحالات البسيطة علي قوانين الحركة لنيوتن، كتطبيقات:

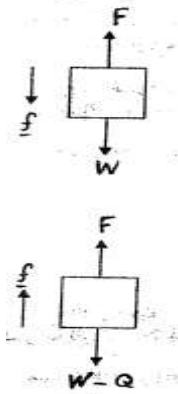
- 1- جسم كتلته m تستقر علي مستوي أفقي: احسب رد الفعل للمستوي علي الجسم إذا تحرك المستوي رأسيا بعجلة f (أ) لأعلي، (ب) لأسفل كما هو موضح بشكل (1).



شكل (1)

- أ- العجلة f لأعلي، فيكون $mf = R_1 - mg$ ، و منها $R_1 = m(f + g)$.
- ب- العجلة f لأسفل، فيكون $mf = mg - R_2$ ، و منها $R_2 = m(g - f)$.

- 2- يهبط منطاد وزنة الكلي W بعجلة ثابتة f : عين الوزن Q الذي



شكل (2)

يجب التخلص منه حتي يبدأ المنطاد في الارتفاع بنفس العجلة.

تؤثر علي المنطاد قوة الجاذبية W والقوة الرافعة F ، وباعتبار

الحركة في اتجاه

رأسي (كما هو موضح بشكل (2) فإن

$$\frac{W}{g} f = W - F$$

وبعد التخلص من الوزن الزائد Q ، نجد أن:

$$\frac{W - Q}{g} f = F - (W - Q)$$

بحذف F من المعادلتين نحصل علي:

$$Q = \frac{2W}{1 + g/f}$$

مصعد وزنه W يبدأ في الصعود

بعجلة f : عين الشد في الحبل المعدني.

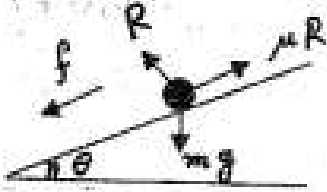
$$T_1 = W(1 + \frac{f}{g}) \Leftrightarrow \frac{W}{g} f = T_1 - W \quad \text{معادلة الحركة:}$$

وإذا بدا المصعد في الهبوط بنفس العجلة، فإن الشد في الحبل T_2 يكون علي الصورة
 $T_2 = W(1 - f/g)$

4- حركة نقطة مادية إلي أسفل مستوي مائل خشن:

ملاحظة: من النتائج التجريبية تبين أن: إذا كان R هو رد الفعل العمودي علي المستوي، μ معامل الاحتكاك، فإن قوة الاحتكاك

النهائي تساوي μR ، وأن $\mu = \tan \lambda$ حيث λ هي زاوية الاحتكاك.



القوي المؤثرة علي النقطة المادية (كما هو

موضح بالشكل 3) هي:

شكل (3)

(i) الوزن mg رأسيا لأسفل

(ii) رد الفعل R عموديا علي المستوي لأعلي

(iii) قوة الاحتكاك النهائي μR ، وتكون إلي أعلي المستوي (أي عكس اتجاه الحركة).

بفرض أن f هي عجلة النقطة المادية لأسفل، فإن معادلتي حركتها هما:

$$mf = mg \sin \theta - \mu R, \quad 0 = R - mg \cos \theta$$

بحذف R نحصل على

$$f = g(\sin \theta - \mu \cos \theta) = g(\sin \theta - \frac{\sin \lambda \cos \theta}{\cos \lambda}) = g \frac{\sin(\theta - \lambda)}{\cos \lambda}$$

إذا كانت $\theta \leq \lambda$ فإن النقطة المادية تظل ساكنة على المستوي.

5- حركة نقطة مادية إلى أعلى مستوي مائل خشن:

معادلات الحركة: من شكل (4) نجد أن:

$$mf = -mg \sin \theta - \mu R,$$

$$0 = R - mg \cos \theta$$

بحذف رد الفعل R ، نحصل على

$$f = -g \frac{\sin(\theta + \lambda)}{\cos \lambda}$$

شكل (4): حركة جسيم لأعلى مستوى مائل خشن

الإشارة السالبة تعني أن سرعة النقطة المادية تتناقص حتي تتلاشي. وإذا كانت

$\theta + \lambda = 0$ تبقى النقطة المادية ساكنة. وإذا كانت $\theta > \lambda$ تهبط النقطة المادية لأسفل

المستوي بالعبء $g \sin(\theta - \lambda) / \cos \lambda$.

مثال (1): مستويان خشنان مائلان لهما نفس الارتفاع موضوعان ظهرا لظهر. وضع

جسيما كتلتاهما m_1, m_2 على السطحين، وربطاً بخيط يمر على بكرة صغيرة ملساء

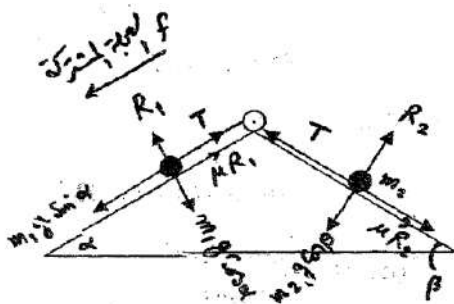
أعلى القمة المشتركة للمستويين. فإذا كان μ معامل الاحتكاك للمستويين. أوجد

العبء المشتركة والشد في الخيط

الحل: معادلات الحركة:

من الشكل (5) الموضح بالرسم نجد أن:

أ- للكتلة m_1 :



شكل (5)

$$m_1 f = m_1 g \sin \alpha - \mu R_1 - T \quad (1)$$

$$R_1 = m_1 g \cos \alpha \quad (2)$$

ب- للكتلة m_2 :

$$m_2 f = T - m_2 g \sin \beta - \mu R_2 \quad (3)$$

$$R_2 = m_2 g \cos \beta \quad (4)$$

من (1) و (2)، نحصل على

$$m_1 f = m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha - T \quad (5)$$

و من (3) و (4)، نحصل على

$$m_2 f = -m_2 g \sin \beta - \mu m_2 g \cos \beta + T \quad (6)$$

بجمع (5) و (6)، نحصل على العجلة المشتركة:

$$\therefore f = g \frac{m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2 (\sin \beta + \mu \cos \beta)}{m_1 + m_2}$$

بالتعويض من العجلة المشتركة f في (5) أو (6) سنحصل على الشد في الخيط T

حالات خاصة:

(i) إذا كان المستويان أملسين، وكانت $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ ، فإن $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore f = -(4g / 3\sqrt{2}), \quad T = 4mg / 3\sqrt{2}, \quad R_1 = mg / \sqrt{2}, \quad R_2 = \sqrt{2}mg$$

(ii) المستويان أملسان $\mu = 0$ ، و $m_1 \neq m_2$ ، فإن:

$$\therefore f = g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta}{m_1 + m_2}, \quad T = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{m_1 + m_2} m_1 m_2 g,$$

$$R_1 / R_2 = m_1 \cos \alpha / m_2 \cos \beta, \quad R_1 = m_1 g \cos \alpha$$

(iii) المستويان أملسان، و $m_1 = m_2 = m$ ، فإن:

$$\therefore f = g \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad T = mg \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

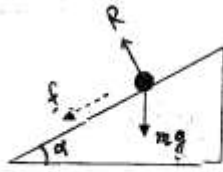
$$R_1 = mg \cos \alpha, \quad R_2 = mg \cos \beta$$

(iv) المستويان أملسان، و $m_1 \neq m_2$ ، $\alpha = \beta$ ، فإن:

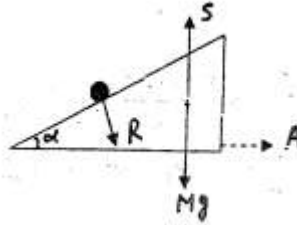
$$\therefore f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \sin \alpha, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \sin \alpha, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

مثال (2): نقطة مادية كتلتها m تنزلق لأسفل علي السطح المائل لإسفين (Wedge) أملس كتلته M ، وكان هذا السطح يميل علي الأفقي بزاوية α ، والإسفين يتحرك علي منضدة أفقية ملساء ثابتة. برهن علي أن عجلة الإسفين هي $mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$ ، وأوجد رد الفعل بين النقطتين المادية والإسفين.

الحل



(a)



(b)

شكل (6)

الشكل 6 (a): يبين القوي المؤثرة علي الكتلة m ، وهي الوزن mg رأسياً لأسفل، ورد الفعل R عمودياً علي السطح المائل.

الشكل 35 (b): يبين القوي المؤثرة علي الكتلة M ، وهي: الوزن Mg رأسياً لأسفل، ورد الفعل R ويساوي ويضاد في الاتجاه R المؤثر علي m ، و رد الفعل S الناتج علي السطح الأفقي الأملس للمنضدة رأسياً لأعلي، وعمودي علي سطح المنضدة.

بفرض أن M تتحرك أفقياً بالعجلة A ، و تتحرك m لأسفل السطح المائل بالعجلة f بالنسبة للإسفين. إذن عجلة m بالنسبة للمنضدة الثابتة تكون محصلة A, f . أي أن

مركبتى عجلة m بالنسبة للمنضدة هما $f \sin \alpha$ رأسيا لأسفل، $f \cos \alpha - A$ أفقيا لليسار.

معادلات الحركة:

$$mf \sin \alpha = mg - R \cos \alpha \quad (1) \quad \text{أ- الكتلة } m$$

$$m(f \cos \alpha - A) = R \sin \alpha \quad (2)$$

$$MA = R \sin \alpha \quad (3) \quad \text{ب- الكتلة } M$$

$$0 = S - R \cos \alpha - Mg \quad (4)$$

من (2) و (3) نجد أن:

$$mf \cos \alpha = (M + m)A \quad (5)$$

من (3) و (5) في (1)؛ بالتعويض عن R ، f نجد أن:

$$\therefore (M + m)A \sin \alpha / \cos \alpha = mg - Mf \cos \alpha / \sin \alpha$$

$$\therefore (M + m)A \sin^2 \alpha = mg \sin \alpha \cos \alpha - MA \cos^2 \alpha$$

$$\therefore A = mg \sin \alpha \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha) \quad (6)$$

من (3) و (6) نحصل علي:

$$\therefore R = Mmg \cos \alpha / (M + m \sin^2 \alpha)$$

مثال (3): قذفت نقطة مادية بسرعة V_0 في اتجاه خط أكبر ميل أعلي مستوي مائل خشن يميل علي الأفقي بزاوية α . اثبت أنه عندما يصبح مقدار سرعة النقطة المادية V_0 مرة أخرى تكون النقطة المادية علي بعد $V_0^2 \cos \alpha \sin 2\lambda / g(\cos 2\lambda - \cos 2\alpha)$ من نقطة القذف، إذا علم أن الزاوية α أكبر من زاوية الاحتكاك λ ؟

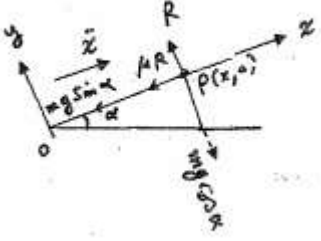
الحل: باختيار محور x منطبقا علي خط أكبر ميل، ومحور y عموديا عليه لأعلي وبفرض أن النقطة المادية بدأت حركتها من نقطة الأصل O .

طبيعة المسألة: تصعد النقطة المادية لأعلي المستوي مسافة معينة، ثم تسكن لحظيا، فتبدأ في العودة مرة أخرى لأسفل المستوي؛ أي أن سرعة النقطة سوف تصبح V_0 مرة

أخري في مكان ما أثناء هبوطها، لذلك سوف ندرس حركة النقطة المادية أثناء صعودها وهبوطها.

أولا - الحركة لأعلي المستوي:

معادلات الحركة: من الشكل الموضح (7) نجد أن:



$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - \mu R \quad (i)$$

$$0 = R - mg \cos \alpha \quad (ii)$$

بحذف R من (i)، (ii) واستخدام $\ddot{x} = \frac{VdV}{dx}$

ثم فصل المتغيرات والتكامل، ومن الشروط الابتدائية

فإن:

$$\therefore V^2 = V_0^2 - 2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)x$$

بوضع $V = 0$ فنحصل علي موضع السكون اللحظي، حيث تبدأ في العودة، وليكن عند

$$x = d$$

$$\therefore d = \frac{V_0^2}{2g} / (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (iii)$$

ثانيا - الحركة لأسفل المستوي:

معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = \mu R - mg \sin \alpha \quad (iv), \quad R = mg \cos \alpha \quad (v)$$

كما في أولا، من (iv) و (v) وفصل المتغيرات والتكامل فنحصل علي:

$$\therefore V^2 = 2gx(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) - V_0^2 \frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}$$

بوضع $\mu = \tan \lambda$ فإن:

$$V^2 = 2gx \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\cos \lambda} - V_0^2 \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin(\lambda + \alpha)}$$

باستخدام $2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ ، وعندما $V = V_0$ مرة

أخري فإن:

$$\therefore x = \frac{V_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \cos \lambda \sin \lambda}{\sin(\lambda - \alpha) \sin(\lambda + \alpha)} = - \frac{V_0^2 \cos \alpha \sin 2\lambda}{g(\cos 2\lambda - \cos 2\alpha)} \quad (iv)$$

الإشارة السالبة تعني أن سرعة النقطة المادية تصبح V_0 وهي على بعد (iv) أسفل النقطة 0 على المستوى المائل.

تمارين (2)

(قوانين نيوتن للحركة)

(1) مستوي مائل خشن يميل علي الأفقي بزاوية α ، قذف جسيमान بنفس السرعة؛ أحدهما إلي أعلي والآخر إلي أسفل المستوي. بين أن النسبة بين المسافات التي يقطعها الجسيमान هي $\sin(\lambda - \alpha) : \sin(\lambda + \alpha)$ ، حيث λ زاوية الاحتكاك، $\alpha > \lambda$.

(2) قطعة خشبية علي هيئة مستوي مائل يميل علي الأفقي بزاوية α ، وضعت علي مستوي أفقي أملس وتركت نقطة مادية كتلتها m تنزلق علي السطح المائل. اثبت أن القوة الأفقية اللازمة لمنع القطعة الخشبية من الانزلاق هي $(M + m \cos^2 \alpha)g$ ؛ حيث M كتلة القطعة الخشبية. واثبت أيضا أنه عندما تتحرك النقطة المادية مسافة رأسية S يكون المستوي قد انزلق مسافة أفقية مقدارها $S \cot \alpha / (m + M \sin \alpha)$.

(3) مستوي خشن طوله 100 م، يميل علي الأفقي بزاوية $\sin^{-1}(3/5)$ ، ومعامل الاحتكاك يساوي $1/2$. ينزلق جسم عليه من سكون من أعلي نقطة. أوجد سرعته عند أسفل نقطة. وإذا قذف من أسفل نقطة فوصل إلي أعلي نقطة في المستوي، فأوجد سرعة القذف.

(4) شوهد جسم وهو ينزلق إلي أسفل مستوي مائل أملس أنه يقطع مسافات متساوية S في فترات زمنية متتالية t_1, t_2 . اثبت أن زاوية ميل المستوي علي الأفقي تساوي $\sin^{-1}[2S(t_1 - t_2) / gt_1 t_2 (t_1 + t_2)]$.

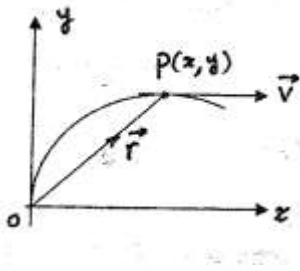
(5) قذف جسيم بسرعة V_0 إلي أعلي مستوي خشن يميل علي الأفقي بزاوية α ، فإذا وصل الجسيم إلي حالة سكون ثم يعود لنقطة البداية بسرعة V_1 . اثبت أن معامل

$$\text{الاحتكاك يساوي } \left(\frac{V_0^2 - V_1^2}{V_0^2 + V_1^2} \tan \alpha \right).$$

المقذوفات (Projectiles)

في هذا الباب، سوف ندرس حركة نقطة مادية مقذوفة في اتجاه يميل علي الأفقي في مجال الجاذبية المتجانس. وتسمى هذه الحركة بحركة المقذوفات. ولإتمام هذه الدراسة، نفرض أن عجلة الجاذبية الأرضية ثابتة، ونهمل - في هذا الباب - مقاومة الهواء لحركة المقذوفات.

عند دراسة حركة نقطة مادية في مستوى، نأخذ نقطة ثابتة في المستوى O كنقطة



أصل والمحورين ox, oy محورين متعامدين

في المستوى وبفرض أنه عند اللحظة t كانت النقطة

المادية عند نقطة p التي إحداثياتها (x, y) بالنسبة

للمحورين $\vec{ox}, \vec{oy}$. وكان $\hat{i}, \hat{j}$ متجهي الوحدة علي

طول المحورين، فإن متجه موضع النقطة المتحركة P هو:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \text{ ومتجه سرعة } P \text{ هو } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \text{؛ حيث } \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

هما مركبتا متجه السرعة في اتجاه محوري الإحداثيات، ويكون

وزاوية ميل السرعة علي $\vec{ox}$ هي: $V = |\vec{V}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$

أي في اتجاه المماس بسرعة قدرها $V = \tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x}) = \tan^{-1}(dy/dx)$

أي $\vec{V} \equiv (V, \theta)$ ، وتكون عجلة النقطة المادية المتحركة P هي:

$$\vec{f} = d\vec{V}/dt = d^2\vec{r}/dt^2 = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

أي أن مركبات متجه العجلة هي: $\ddot{x} = d^2x/dt^2, \ddot{y} = d^2y/dt^2$ وقيمة العجلة

واتجاهها هما: $f = |\vec{f}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \phi = \tan^{-1}(\ddot{y}/\ddot{x})$

3-1- المقذوفات علي مستوى أفقي:

المقذوف هو نقطة مادية تتحرك في مستوى رأسي تحت تأثير وزنها فقط؛ أي أننا نهمل مقاومة الهواء، ودوران الأرض في هذا الباب. كما أننا نعتبر أن عجلة الجاذبية g ثابتة.

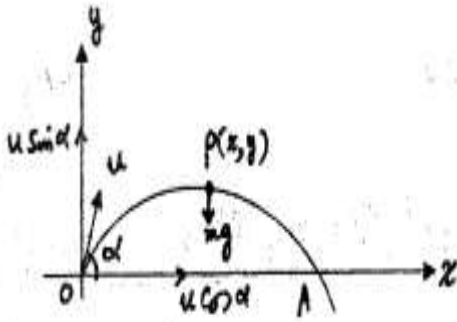
3-1-1- دراسة الحركة :

نقطة مادية كتلتها m ، قذفت بسرعة u في اتجاه يميل α علي الأفقي. نختار O نقطة أصل (نقطة القذف) في البداية للمقذوف، و $\vec{ox}$ أفقياً، و $\vec{oy}$ رأسياً لأعلي؛ وفي المستوي المار بالمحور $\vec{ox}$ والسرعة الابتدائية $\vec{u}$.

1- تعيين الموضع: نفرض أنه

عند اللحظة t كانت النقطة المادية عند

الموضع $P(x, y)$



2- القوة المؤثرة: وزن النقطة المادية

(المقذوف) mg ؛ ويؤثر رأسياً لأسفل.

3- معادلات الحركة:

$$m\ddot{x} = 0 \quad (1) \quad m\ddot{y} = -mg \quad (2)$$

بالتكامل وحساب الثوابت (طبقاً للشروط الابتدائية

at $t = 0, \dot{x} = u \cos \alpha, \dot{y} = u \sin \alpha, x = 0, y = 0$) لنحصل على:

$$\therefore \dot{x} = u \cos \alpha \quad (3) \quad \dot{y} = -gt + u \sin \alpha \quad (4)$$

$$\therefore x = u \cos \alpha \quad (5) \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + ut \sin \alpha \quad (6)$$

ومن ذلك نجد أن مركبات سرعة المقذوف في الاتجاهين $\vec{ox}$ ، $\vec{oy}$ يتعينان من (3)،
(4) في أي لحظة زمنية t . أما إحداثيا الموضع له فيحددان في أي لحظة من (5)،
(6).

3-1-2- تطبيقات (خواص مسار القذيفة):

1- زمن أقصى ارتفاع (Time of greatest height): نحصل عليه بوضع $\dot{y} = 0$ (لأنه عند أقصى إرتفاع تكون سرعة النقطة المادية كلها أفقية وليس لها مركبة رأسية) في (4) فنحصل على:

$$\therefore t_H = \frac{u}{g} \sin \alpha \quad (A)$$

2- أقصى ارتفاع: (Greatest Height): هو الارتفاع الذي يتوقف عنده المقذوف عن الحركة الرأسية، وتكون الحركة كلها أفقية؛ أي أن أقصى ارتفاع هو المسافة المقطوعة في الاتجاه $\vec{oy}$ في الزمن t_H فمن (A) في (6) فإن:

$$\therefore y_H = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (B)$$

3- زمن الطيران (Time of Flight): هو الزمن الذي تستغرقه القذيفة من لحظة القذف حتي تصطدم بالمستوي الأفقي المار بالنقطة O. بوضع $y = 0$ في المعادلة (6) فإن:

$$\therefore t_f = \frac{2u}{g} \sin \alpha \quad (C)$$

ونلاحظ هنا (من العلاقتين A, C) أن $t_f = 2t_H$ ، وهذا يتفق مع طبيعة الحركة؛ إذ أن مسار القذيفة متماثل مع الخط الراسي عند أقصى ارتفاع.

4- المدى (Range): هو المسافة بين نقطتي القذف والاصطدام بالمستوي الأفقي

المرار بنقطة القذف؛ أي أنها المسافة $R = OA$ في اتجاه المحور $\vec{OX}$ ، والمقطوعة بزمان الطيران (C) إذن من (C) في (5)، نجد أن:

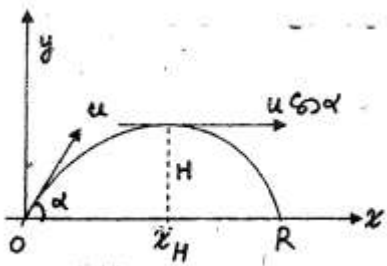
$$\therefore R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha \quad (D)$$

ونحصل على الزاوية المناظرة لأقصى مدى $R_{\max}$ عندما $\sin 2\alpha = 1$ ، أي أن $2\alpha = \pi/2$ ومنها $\alpha = \pi/4$ ، إذن $R_{\max} = u^2/g$ وفي هذه الحالة يلاحظ وجود اتجاهين للقذف α ، $\pi/2 - \alpha$ عندهما يتساوى ميلاهما على الأفقي والرأسي على الترتيب. ومن ذلك يكون اتجاه السرعة الابتدائية للقذف منصفاً للزاوية بين الأفقي والرأسي لكي نحصل على أقصى مدى.

5- معادلة المسار (Hodograph أو Path): ونحصل عليها بحذف الزمن t

بين (5)، (6) فيكون الناتج هو الصورة الكرتيزية لمعادلة المسار:

$$\therefore y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2} \sec^2 \alpha \quad (E)$$



والمعادلة (E) تمثل قطعاً مكافئاً، محوره رأسي ومفتوح لأسفل، ويمر بنقطة القذف ونقطة الاصطدام بالأرض ورأسه عند أقصى ارتفاع. ويلاحظ أن المنحني متماثل حول الخط الرأسي المرار برأس القطع.

من (E) يمكن إيجاد **المدى** بوضع $y = 0$ ، ونوجد

قيمتي x وهما $x_0 = 0$ ، $x_{\max} = R$. كذلك يمكن إيجاد **اتجاه السرعة** عند أي نقطة على المسار؛ حيث يكون هو اتجاه المماس للمنحني والذي ميله هو dy/dx .

وإذا أردنا تحديد نقطة أقصى ارتفاع نضع $dy/dx = 0$ ، حيث تحدد منها x_H ، ومن ثم نحسب H أيضا.

3-1-3- خواص معادلة المسار:

حيث إن معادلة المسار تمثل قطعاً مكافئاً، إذن نستطيع استنتاج خواص هذا القطع كما يلي. بإكمال المربع في المعادلة (E) نحصل على الصورة القياسية لمعادلة القطع وهي على الصورة:

$$\therefore \left(x - \frac{u^2}{2g} \sin 2\alpha\right)^2 = -\frac{2u^2}{g} \cos^2 \alpha \left(y - \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha\right)$$

بيانات معادلة المسار:

والمعادلة السابقة لقطع مكافئ، محوره رأسي ومفتوح لأسفل، ورأسه لأعلى، وطول وتره البؤري العمودي هو: $\frac{2u^2}{g} \cos^2 \alpha$ وإحداثيا رأسيه هما:

$\left(\frac{u^2}{2g} \sin 2\alpha, \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha\right)$ ، وإحداثيا البؤرة F يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\frac{u^2}{2g} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} R = x_H = x_F$$

الإحداثي السيني: $y_F \equiv$ بعد الرأس عن محور ox مطروحا منه $\frac{1}{4}$ الوتر البؤري العمودي، أي أن:

$$y_F = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha - \frac{u^2}{2g} \cos^2 \alpha = -\frac{u^2}{2g} \cos 2\alpha$$

$$F(x_F, y_F) \equiv \frac{u^2}{2g} (\sin 2\alpha, -\cos 2\alpha) \quad \underline{\text{إحداثيا البؤرة:}}$$

الباب الثالث

والإشارة السالبة تعني أن البؤرة تقع أسفل محور $\overrightarrow{OX}$ (أي أسفل المستوي المار بنقطة القذف).

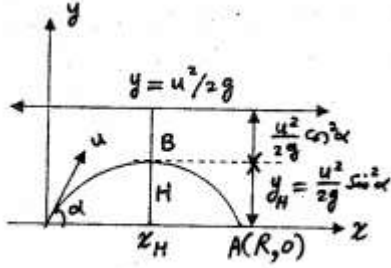
ومعادلة الدليل: وهو خط مستقيم أفقي يبعد عن رأس القطع مسافة تساوي ربع الوتر

البؤري العمودي $(\frac{u^2}{2g} \cos^2 \alpha)$ ؛ أي أن الدليل يبعد عن محور السينات مسافة تساوي

$$\frac{u^2}{2g} \cos^2 \alpha + \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{u^2}{2g}$$

إذن معادلة الدليل هي $y = u^2/2g$ مع

ملاحظة أن $u^2/2g$



هي أكبر ارتفاع يمكن لمقذوف أن يصل

إليه بسرعة قذف u ؛ أي أن الدليل يعتبر خط أمان

أفقي كما يلاحظ أن

المقدار $(u^2/2g)$ يساوي نصف أكبر مدي.

وجدير بالذكر أن معادلة الدليل لا تتوقف علي

الزاوية α ؛ لأن ارتفاع الدليل منسوب إلي نقطة القذف، ويساوي $u^2/2g$ ، ولا يتوقف

إلا علي سرعة القذف، وهذا يعني أنه إذا قذفت قذائف مختلفة في اتجاهات مختلفة

وبسرعة قذف واحدة فإنها تتبع مسارات مختلفة لها نفس الدليل.

منحني الأمان: إذا كانت السرعة الابتدائية u للمقذوف في أي اتجاه، بحيث مسار

المقذوف لا يتعدى منطقة معينة في الفراغ؛ تسمى منطقة الأمان. وتحدد هذه المنطقة

بما يسمى بمنحني الأمان، ونجده باستخدام $\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ في معادلة المسار

(E) فنحصل علي:

$$\tan^2 \alpha - \frac{2u^2}{gx} \tan \alpha + \left(\frac{2u^2 y}{gx^2} + 1 \right) = 0 \quad (F)$$

الباب الثالث

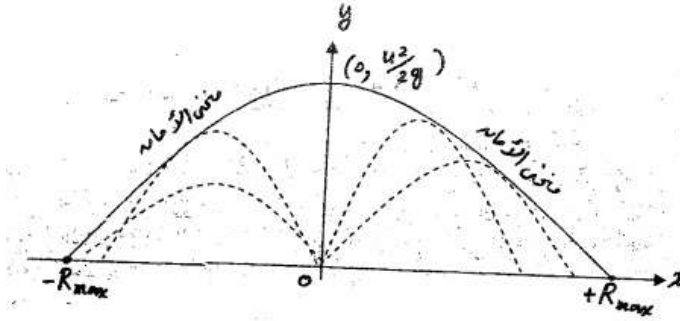
وهذه معادلة من الدرجة الثانية في $\tan \alpha$ ، وبذلك يكون هناك اتجاهان مناظران للقيمتين الناتجتين من هذه المعادلة، وذلك حتي يمر المسار بنقطة معينة $P(x, y)$ معلومة الإحداثيات، ولكن $\tan \alpha$ كمية حقيقية فيجب أن يكون المميز للمعادلة (F) موجبا. ومنحني الأمان هو الحد الفاصل بين كون المميز موجبا أو سالبا. فإذا كان المميز سالبا فلا يصل المقذوف إلي النقطة P ، وبذلك فإن معادلة منحني الأمان تنتج من مساواة مميز المعادلة (F) بالصفر؛ بمعنى

$$\left(\frac{2u^2}{gx}\right)^2 - 4\left(\frac{2u^2y}{gx^2} + 1\right) = 0$$

ومنها نحصل علي:

$$\therefore x^2 = -\frac{2u^2}{g}(y - u^2/2g) \quad (G)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ - أيضا - رأسه $(0, u^2/2g)$ ومحوره $\overrightarrow{oy}$ ويقطع $\overrightarrow{ox}$ في النقطتين $(\pm u^2/g, 0)$ وتكون $R_{\max} = u^2/g$.



وطبقا لمنحني الأمان والدليل تصمم ميادين وصلات الرماية في الأندية وفي القوات المسلحة.

سرعة القذف بعد مرور زمن t : من المعادلة (3)، نلاحظ أن مركبة السرعة الأفقية $\dot{x}$ ثابتة طوال حركة المقذوف؛ ويرجع ذلك إلي عدم وجود أي قوى أفقية تؤثر علي المقذوف. ومن (3) و (4) نجد أن:

$$\begin{aligned} V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha - gt)^2 \\ &= u^2 - 2g(ut \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2) \end{aligned}$$

ومن (6) نجد أن: $V^2 = u^2 - 2gy$ ، وهذه هي نفس قانون الحركة الرأسية في خط مستقيم تحت تأثير الجاذبية فقط. وهذا يؤكد أن سرعة القذيفة تعتمد فقط علي ارتفاعها y عن المستوي الأفقي، وعلي سرعتها الابتدائية u . والسرعة توضع علي الصورة $V^2 = 2gl$ ، حيث $l = u^2/2g - y$ ؛ l هو عمق أي نقطة علي المسار أسفل خط الدليل؛ أي أنه لو تركت نقطة مادية لتسقط رأسيا من نقطة علي الدليل فإنها تصل إلي نقطة علي القطع المكافئ بنفس سرعة القذيفة عند النقطة التي علي القطع. ومن ثم فإن سرعة القذيفة عند أي موضعين علي خط أفقي واحد لهما نفس المقدار طالما أنهما علي منحنى المسار.

3-1-4 أمثلة محلولة:

مثال(1): قذف جسيم بسرعة ابتدائية 19.6 m/sec . أوجد أقصى مدى علي المستوي الأفقي المار بنقطة القذف. وأوجد اتجاهي القذف لكي نحصل علي مدى يساوي 12 m .
الحل: نفرض أن α زاوية ميل القذف علي المستوي الأفقي، فتكون معادلات الحركة كالآتي:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = -mg$$

بالتكامل ومن الشروط الابتدائية $\dot{x}_0 = 19.6 \cos \alpha, \dot{y}_0 = 19.6 \sin \alpha$ فإن:

$$\therefore \dot{x} = 19.6 \cos \alpha, \quad \dot{y} = 19.6 \sin \alpha - gt$$

بالتكامل ومن الشروط الابتدائية $x_0 = y_0 = 0$ at $t = 0$

$$\therefore x = 19.6t \cos \alpha, \quad y = 19.6t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

لإيجاد زمن الطيران نضع $y=0$ فنحصل علي:

$$0 = 19.6t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2, \quad \therefore g = 9.8 \text{ m/sec}^2$$

$$\therefore t_0 = 0 \text{ or } t_f = \frac{19.6}{4.9} \sin \alpha = 4 \sin \alpha$$

$$\text{المدي الأفقي} \equiv R = x_{\max} = (19.6 \cos \alpha)(4 \sin \alpha) = 39.2 \sin 2\alpha \quad (*)$$

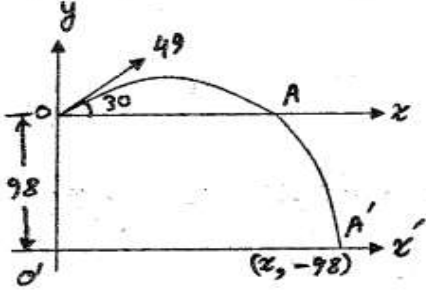
عند أقصى مدى $\alpha = \pi/4$ ، فإن $R_{\max} = 39.2 \text{ m}$. وعندما يساوي المدى 12 m نجد من (*) أن:

$$\therefore 12 = 39.2 \sin 2\alpha \quad \therefore \sin 2\alpha = 0.306$$

$$\therefore 2\alpha = 18^\circ \text{ or } 162^\circ \Rightarrow \alpha = 9^\circ \text{ or } 81^\circ$$

مثال(2): قذف جسيم من قمة صخرة - علي شاطئ البحر - ارتفاعها 98 m ، بسرعة ابتدائية 49 m/sec وبزاوية قذف 30° مع الأفقي. أوجد المسافة الأفقية من قاعدة الصخرة إلي نقطة اصطدام الجسيم بالماء.

الحل: المطلوب هو إيجاد الإحداثي السيني x للنقطة A ، وهي نقطة اصطدام الجسيم بسطح البحر (كما بالشكل).



لكي نحصل علي زمن الطيران من نقطة القذف O إلي النقطة A' علي سطح الماء نضع $y = -98$ في المعادلة (6) مع الأخذ في الاعتبار:

$$u \cos \alpha = 49 \cos 30^\circ = 24.5\sqrt{3}, \quad u \sin \alpha = 49 \sin 30^\circ = 24.5$$

$$\therefore -98 = 24.5t - \frac{1}{2}(9.8)t^2 \Rightarrow t^2 - 5t - 20 = 0$$

$$t = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{25 + 80}) = 7.6 \equiv \text{إذن زمن الطيران}$$

بالتعويض بهذا الزمن في (5) نحصل علي المسافة الأفقية المقطوعة $O'A$ ، وهي:

$$\therefore x = (24.5\sqrt{3})(7.6) \cong 322m$$

مثال(3): إذا كان r هو المدى الأفقي لمقذوف، وكان h هو أقصى ارتفاع له. برهن أن السرعة الابتدائية للقذف هي $[2g(h + r^2/16h)]^{1/2}$. وإذا كان $r = 3h$ فأوجد زاوية القذف.

الحل: إذا كانت u السرعة الابتدائية وأن α زاوية القذف، وكما سبق من العلاقة D يمكن الحصول علي المدى علي الصورة:

$$\therefore r = \frac{2u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1)$$

وأقصى ارتفاع (من العلاقة B) هو

$$\therefore h = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (2)$$

إذن من (2) نجد أن

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{u^2}{2gh} = 1 + \cot^2 \alpha \quad (3)$$

بقسمة (1) علي (2) فنحصل علي

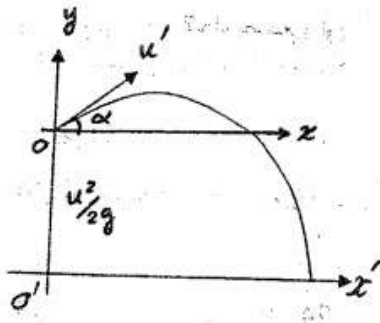
$$\therefore \cot \alpha = \frac{r}{4h} \quad (4)$$

بالتعويض من (4) في (3)، فإن $\frac{u^2}{2gh} = 1 + \frac{r^2}{16h^2}$ ، إذن سرعة القذف هي:

$$\therefore u = \left[2g \left(h + \frac{r^2}{16h} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ولما كان $r = 3h$ ، فإن، من (4)، $\tan \alpha = \frac{4h}{3h} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right)$ ، و إذا كان

$$r = 4h، \text{ فإن } \alpha = \frac{\pi}{4}$$



مثال (4): أطلقت قذيفة من قمة برج ارتفاعه $u^2/2g$

عن سطح الأرض بسرعة ابتدائية u تصنع زاوية α مع الأفقي. أثبت أن أقصى ارتفاع تصل إليه النقطة هو $u^2(\sin^2 \alpha + 1)/2g$ ، وأوجد سرعتها عندما تصل إلي الأرض.

الحل: في البداية $t = 0, x = 0, y = 0$ ، فإن:

$$\therefore \dot{x}_0 = u \cos \alpha, \quad \dot{y}_0 = u \sin \alpha$$

$$\therefore \dot{x} = u \cos \alpha, \quad \dot{y} = u \sin \alpha - gt \quad (1)$$

$$\therefore x = ut \cos \alpha, \quad y = ut \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

إذن زمن أقصى ارتفاع $t_H = \frac{u}{g} \sin \alpha$ ، بالتعويض في (2) عن t لنحصل علي

أقصى ارتفاع عن ox

$$\begin{aligned}\therefore y_1 &= \frac{u^2}{g} \sin^2 \alpha - \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha \\ &= \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

إذن أقصى ارتفاع عن سطح الأرض

$$، H = y_1 + \frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} (\sin^2 \alpha + 1) \text{ يكون}$$

وللحصول علي زمن الوصول إلي الأرض نضع $y = -u^2/2g$ في (2)

$$\therefore t^2 - \frac{2u}{g} \sin \alpha t - \frac{u^2}{g^2} = 0$$

$$\therefore t = \frac{u}{g} \sin \alpha (1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha})$$

ولإيجاد السرعة التي يصل بها المقذوف إلي الأرض نعوض عن t في (2) مع استخدام

(1) كالآتي:

$$\therefore \dot{x} = u \cos \alpha , \dot{y} = u \sin \alpha - u \sin \alpha (1 + \sqrt{1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha})$$

$$\therefore \dot{y} = -u \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$$

$$\therefore V^2 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + u^2 (1 + \sin^2 \alpha)} = u \sqrt{2}$$

تمارين (1-3)

(المقذوفات علي المستوى الأفقي)

(1) قذف جسيم بسرعة 196 م/ث علي المستوى الأفقي بزاوية قذف 30° مع الأفقي. أوجد (i) أقصى ارتفاع، (ii) زمن الطيران والمدى، (iii) السرعة واتجاه الحركة عند ارتفاع 130 م.

(2) أطلقت قذيفة بسرعة، مركباتها الأفقية والرأسية u, v علي الترتيب. أوجد موضعها بعد زمن t ، وإذا كانت مركبة السرعة الأفقية 600 م/ث. أوجد الاتجاه الذي يجب أن تقذف فيه لكي تصيب هدفا علي ارتفاع 2 م ويبعد مسافة 500 م من نقطة القذف.

(3) قذيفتان، أطلقتا من نقطة واحدة O في نفس اللحظة الزمنية وبزاويتي ميل θ_1, θ_2 مع الأفقي، لتصيبا نفس النقطة P والتي لها زاوية ارتفاع α . اثبت أن $\tan \theta_1 - \tan \theta_2 = \tan \alpha$.

(4) أطلقت قذيفة بسرعة قدرها 640 قد/ث في اتجاه 30° مع الأفقي أوجد أقصى ارتفاع، والمدى، وزمن الطيران، وسرعة واتجاه الحركة علي ارتفاع 576 قدما. $[H = 1600 \text{ ft}, R = 6400 \text{ ft}, t_f = 20 \text{ sec}, \tan \theta_{1,2} = \pm 4/5\sqrt{3}]$

(5) أطلقت قذيفة من نقطة الأصل O ، فوجد أنها تمر بالنقطتين (12,12)، (36,12) قدما. أوجد سرعة القذف مقدارا واتجاها. ثم أوجد زمن الطيران والمدى علي المستوى الأفقي.

(6) أوجد أقل سرعة تقذف بها نقطة مادية حتي يمكنها أن تطير أعلي سور يرتفع 10 ft، ويبعد 13 ft عن نقطة القذف، ويصطدم بالمستوي الأفقي المار بنقطة القذف في نقطة تبعد 7 ft عن السور.

(7) مدفع يقذف قذائفه علي مستوي سطح البحر بسرعة قدرها 32 قد/ث. اثبت أنه إذا ركب المدفع علي قاعدة ارتفاعها 64 قدما، فإن أقصى مدي يزداد بمقدار الضعف.

(8) شاط لاعب الكرة بسرعة V في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي من نقطة P فوصلت إلي النقطة Q بعد فترة زمنية t ثانية. أوجد المسافة الأفقية، والمسافة الرأسية لـ Q بالنسبة لـ P . وبين أنه إذا كان PQ يميل علي الأفقي بالزاوية θ ، فإن اتجاه الكرة عند Q يميل علي الأفقي بالزاوية $\tan^{-1}(2 \tan \theta - \tan \alpha)$.

(9) أطلق مقذوف من نقطة O بسرعة 125 م/ث ليصطدم بنقطة علي بعد 1000 م من O وعلي ارتفاع 200 م أيضا من المستوي الأفقي المار بنقطة القذف O . بإهمال مقاومة الهواء واعتبار عجلة الجاذبية $g = 9.8 \text{ m/sec}$. احسب (i) أقصى ارتفاع فوق O ، (ii) زمن الطيران، (iii) زاوية القذف ليصطدم المقذوف بالنقطة في أقل وقت ممكن. $[\alpha = \tan^{-1}(11/5)]$

(10) يطلق مدفع قذيفة علي مستوي أفقي بسرعة ابتدائية 704 قد/ث لتبلغ أقصى مدي لها، أوجد زمن الطيران. $[22\sqrt{2} \text{ sec}]$

(11) مدي قذيفة 1200 yds، إذا أطلقت بزاوية α مع الأفقي، اثبت أنه إذا أطلقت القذيفة بنفس الميل α من دبابة تسير بسرعة 10 ميل/س نحو الهدف، فإن المدى يزداد بمقدار $220\sqrt{\tan \alpha}$ قدما، "1 ميل/س = $\frac{22}{15}$ قدم/ث"

(12) أطلقت قذيفة نحو البحر في الاتجاه الأفقي من مدفع عند قمة صخرة ارتفاعها 180 قدما. احسب بعد نقطة تصادمها مع الماء إذا كانت سرعة القذف 800 ft/sec ، ثم احسب زاوية ميل القذيفة عند ملاستها لسطح الماء.

(13) أطلقت رصاصة من فوق قمة صخرة ارتفاعها h ، فبلغت أقصى ارتفاع $(h+b)$

فوق سطح البحر، واصطدمت بالماء عند مسافة علي بعد a من قاع الصخرة. برهن أن

$$a^2 \tan^2 \alpha - 4ab \tan \alpha - 4bh = 0$$

بالعلاقة تعطي الرصاصة

(14) إذا كانت سرعة نقطة مادية عند أقصى ارتفاع لها $\sqrt{2/5}$ من سرعتها عندما

تكون علي ارتفاع يساوي نصف أقصى ارتفاع. اثبت أن زاوية القذف تساوي 60° .

(15) قذف جسيم من النقطة O بسرعة V_0 في اتجاه يميل بزاوية α علي الأفقي.

أوجد الشرط اللازم لكي يكون متجه موضع الجسيم عند لحظة زمنية معينة عموديا علي

سرعته، ثم أوجد متي يتحقق هذا الشرط؟

(16) إذا كان أقصى مدي لقذيفة 16 ميلا. أوجد سرعة القذف، واثبت أنه عندما تقطع

القذيفة 4 ميلات أفقيا تكون علي ارتفاع 3 ميلات.

(17) إذا كان t_f زمن الطيران، R المدى، فاثبت أن $gt_f^2 = 2R \tan \alpha$ ؛ حيث α

زاوية القذف. فإذا علم أن أقصى مدي 100 ميلا، وزمن الطيران المناظر 3sec.

أوجد سرعة القذف وأقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة.

(18) قذفت كرة من المطاط بسرعة 32 قدم /ث في اتجاه يميل علي الأرض بزاوية

45° من نقطة تبعد 36 قدما من سور رأسي، إذا كان معامل الارتداد بين الأرض والكرة

هو $1/2$. أوجد الموضع الذي تصطدم فيه الكرة بالسور.

3-2- المقذوفات علي المستوي المائل:

(Projectiles on the Inclined Plane)

3-2-1- دراسة الحركة:

نفرض أن جسما قذف بسرعة u في اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي

(من نقطة O كما بالشكل) علي

مستوي يميل علي الأفقي بزاوية β .

وباختيار خط أكبر ميل للمستوي

لأعلي، ليكون محور $\vec{OX}$ والعمودي

عليه محور $\vec{OY}$. فتكون مركبتا

سرعة القذف هما:

$$u \cos(\alpha - \beta) \text{ في اتجاه } \vec{OX}, \quad u \sin(\alpha - \beta) \text{ في اتجاه } \vec{OY}.$$

والآن، إذا كان P موضع الجسم عند اللحظة t ، حيث mg وزن الجسم رأسيا

لأسفل - مع إهمال مقاومة الهواء - فيمكن كتابة معادلات الحركة كالآتي:

$$m\ddot{x} = -mg \sin \beta \quad \therefore \quad \ddot{x} = -g \sin \beta, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos \beta \quad \therefore \quad \ddot{y} = -g \cos \beta \quad (2)$$

$$\therefore \quad \dot{x} = -gt \sin \beta + c_1, \quad \dot{y} = -gt \cos \beta + c_2 \quad \text{نكتب بالتكامل،}$$

ومن الشروط الابتدائية للحركة

$$(at t = 0, \dot{x} = u \sin(\alpha - \beta), \quad \dot{y} = u \cos(\alpha - \beta)) \text{ فإن:}$$

$$\therefore \quad \dot{x} = u \cos(\alpha - \beta) - gt \sin \beta, \quad (3)$$

$$\dot{y} = u \sin(\alpha - \beta) - gt \cos \beta \quad (4)$$

وبالتكامل مرة ثانية، ومن الشروط الابتدائية ($at t = 0, x = 0, y = 0$) نحصل علي:

$$x = ut \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}gt^2 \sin \beta \quad (5)$$

$$y = ut \sin(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}gt^2 \cos \beta \quad (6)$$

لاحظ أنه عندما $\beta = 0$ ، أي للمستوى الأفقي، فسوف نحصل على المعادلات (1) - (6) لدراسة المقذوفات على المستوى الأفقي، كما في جزء (3-1-1).

3-2-2- تطبيقات (خواص مسار القذيفة):

1- زمن أقصى ارتفاع (The time for greatest height):

لإيجاد زمن أقصى ارتفاع، نضع $\dot{y} = 0$ في (4)،

$$\therefore t_H = \frac{u \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \quad (A)$$

2- أقصى ارتفاع (Greatest height):

نعوض من (A) في (6)، فنحصل على أقصى ارتفاع

$$\therefore H = \frac{u^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{2g \cos \beta} \quad (B)$$

3 - زمن الطيران (Time of flight):

نضع $y=0$ في المعادلة (6) لنحصل على: إما $t=0$ (في البداية) أو

$$\therefore t_f \equiv t_A = \frac{2u \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \quad (C)$$

4 - المدى (Range): وهو المسافة OA على خط أكبر ميل للمستوي المائل. وفي

الشكل السابق نجد أن المسافة في اتجاه $\vec{OX}$ المقطوعة في زمن الطيران هي OA ، إذن

من (C) فإن:

$$\begin{aligned} \therefore R &= \frac{2u^2}{g \cos \beta} \sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta) - \frac{2u^2}{g \cos^2 \beta} \sin^2(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta} [\cos(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \sin \beta] \\ \therefore R &= \frac{2u^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta} \end{aligned} \quad (D)$$

$$= \frac{u^2}{g \cos^2 \beta} [\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta] \quad (D)'$$

5 - أكبر مدى (Maximum range): من (D) حيث إن النهاية العظمى للمدى

تتحقق عندما تكون $\sin(2\alpha - \beta)$ في نهايتها العظمى؛ أي عندما $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

ومنها $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ وتكون النهاية العظمى للمدى هي:

$$\begin{aligned} R_{\max} &= \frac{u^2}{g \cos^2 \beta} (1 - \sin \beta) \\ &= \frac{u^2 (1 - \sin \beta)}{g (1 - \sin^2 \beta)} = \frac{u^2}{g (1 + \sin \beta)} \end{aligned} \quad (E)$$

6- المحل الهندسي لنقطة تلاقي المسار بالمستوي المائل:

أي المحل الهندسي للنقطة A، غير الزاوية β ، بينما تظل u ثابتة فإن

$$R_{\max} = r, \beta = \theta. \text{ فمن المعادلة (E) نحصل على } r = \frac{u^2 / g}{1 + \sin \theta} \text{ وهذه هي}$$

المعادلة القطبية لقطع مكافئ، وسوف نطلق عليه القطع المكافئ المغلف للمسار.

3-2-4- أمثلة محلولة:

مثال (1): قذف جسم بسرعة 20 م/ث بزاوية 45° مع الأفقي. أوجد المدى علي مستوي يميل بزاوية 30° علي الأفقي عندما أولا- يقذف لأعلي المستوي. ثانيا- يقذف لأسفل المستوي.

الحل: أولا: عندما يكون القذف لأعلي المستوي:

نفرض أن الجسم عند الموضع $P(x, y)$ في اللحظة الزمنية t ، حيث يتحرك الجسم تحت تأثير وزنه mg فقط رأسيا لأسفل. إذن معادلات الحركة تكون:

$$m\ddot{x} = -mg \sin 30, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos 30 \quad (2)$$

$$\therefore \dot{x} = 20 \cos 15 - gt \sin 30, \quad (3)$$

$$\dot{y} = 20 \sin 15 - gt \cos 30 \quad (4)$$

وذلك من الشروط الابتدائية $(at t = 0, \dot{x} = 20 \cos 15, \dot{y} = 20 \sin 15)$. ومن (3)، (4) نحصل علي:

$$\therefore x = 20t \cos 15 - \frac{1}{4}gt^2, \quad (5)$$

$$y = 20t \sin 15 - \frac{\sqrt{3}}{4}gt^2 \quad (6)$$

حيث استخدمنا أيضا الشروط الابتدائية $at t = 0, x = 0, y = 0$

من (6) بوضع $y = 0$ نجد أن:

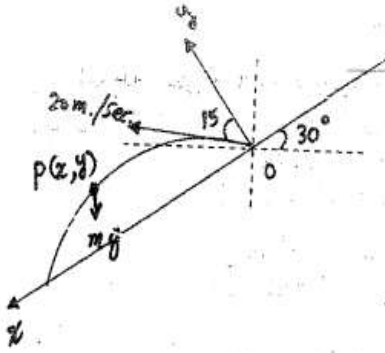
$$t_0 = 0 \text{ or } t_f = \frac{(4)(20 \sin 15)}{\sqrt{3}g} = 1.2 \text{ sec}$$

وبالتعويض عن t_f في (5)، فنحصل علي المدى لأعلي المستوي:

$$\therefore R_{up} = (20)(1.2)(0.965) - \frac{1}{4}(9.8)(1.2)^2 \cong 19.6 \text{ m}$$

ثانيا- عندما يكون القذف إلي أسفل المستوي، فمعادلات الحركة:

الباب الثالث



$$m\ddot{x} = mg \cos 60^\circ \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos 30^\circ \quad (2)$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{1}{2}g, \quad \ddot{y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}g$$

$$\therefore \dot{x} = \frac{1}{2}gt + c_1, \quad \dot{y} = -\frac{g\sqrt{3}}{2}t + c_2$$

$$\text{at } t = 0 \Rightarrow \dot{x} = 20 \cos 75^\circ, \quad \dot{y} = 20 \sin 75^\circ$$

$$\therefore c_1 = 20 \cos 75^\circ, \quad c_2 = 20 \sin 75^\circ.$$

$$\therefore \dot{x} = 20 \cos 75^\circ + \frac{1}{2}gt \quad (3)$$

$$\dot{y} = 20 \sin 75^\circ - \frac{1}{2}g\sqrt{3}t \quad (4)$$

$$\therefore x = 20t \cos 75^\circ + \frac{1}{4}gt^2 \quad (5)$$

$$y = 20t \sin 75^\circ - \frac{\sqrt{3}}{4}gt^2 \quad (6)$$

من (6)، عندما $y = 0$ ، فإن $t_0 = 0$ أو زمن الطيران يكون

$$t_f = \frac{4 \times 20 \sin 75^\circ}{\sqrt{3}g} \cong 4.6 \text{ sec}$$

بالتعويض عن زمن الطيران t_f في (5) لنحصل علي المدى لأسفل المستوي

$$\therefore R_{\text{down}} = 20 \times 4.6 \cos 75^\circ + \frac{1}{4} \times 9.8 \times (4.6)^2 \cong 75 \text{ m}$$

ملحوظة: يمكن إيجاد المدى بطريقة أخرى كالآتي:

$$\text{السرعة الأفقية} \equiv 20 \cos 45^\circ = 20/\sqrt{2}$$

$$\text{المسافة المقطوعة في 4.6 ث} \equiv \frac{20}{\sqrt{2}} \times 4.6 = 46\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\text{المدى علي المستوي المائل لأسفل} \equiv R_{\text{down}} = \frac{46\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} \cong 75 \text{ m}$$

الباب الثالث

وبنفس الطريقة يمكن حساب R_{up} (المدى على المستوى المائل للأعلى).

مثال (2): قذف جسيم علي مستوي مائل علي الأفقي بزاوية α بسرعة ابتدائية u .

أثبت أن أقصى مدي للقذف لأسفل المستوي يكون أكبر

من أقصى مدي لقذف الجسيم لأعلي بالنسبة

$$(1 + \sin \alpha) / (1 - \sin \alpha)$$

الحل: نفرض أن اتجاه القذف يصنع الزاوية θ

مع المستوي المائل (كما بالرسم).

أولاً- عند القذف لأعلي من نقطة A :

$$\therefore y = ut \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha \quad (1)$$

بوضع $y = 0$ ، نحصل علي زمن الطيران على الصورة:

$$\therefore t = \frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha} \quad (2)$$

وحيث إن السرعة الأفقية هي $u \cos(\theta + \alpha)$ ، إذن المسافة الأفقية المقطوعة في الزمن

t ، كما في (2)، هي:

$$\begin{aligned} MA &= u \cos(\theta + \alpha) \frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha} \\ &= \frac{2u^2}{g \cos \alpha} \sin \theta \cos(\theta + \alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

و المدى لأعلي يكون:

$$\begin{aligned} R_{up} &= MA \sec \alpha = \frac{2u^2}{g \cos^2 \alpha} \sin \theta \cos(\theta + \alpha) \\ &= \frac{u^2}{g \cos^2 \alpha} [\sin(2\theta + \alpha) - \sin \alpha] \end{aligned}$$

الباب الثالث

عندما يكون $\sin(2\theta + \alpha) = 1$ ، نحصل علي أقصى مدي لأعلى:

$$\therefore (R_{up.})_{\max} = \frac{u^2}{g \cos^2 \alpha} (1 - \sin \alpha) \quad (A)$$

ثانياً- عند القذف من نقطة B :

حيث المركبة الأفقية للسرعة $u \cos(\alpha - \theta) = u \cos(\theta - \alpha)$ ،

إذن المسافة الأفقية المقطوعة في الزمن (2) هي:

$$l = u \cos(\theta - \alpha) \frac{2u \sin \theta}{g \cos \alpha} = \frac{2u^2}{g \cos \alpha} \sin \theta \cos(\theta - \alpha)$$

المدى لأعلي المستوي المائل يكون:

$$R_{down} = l \sec \alpha = \frac{u^2}{g \cos^2 \alpha} [\sin(2\theta - \alpha) + \sin \alpha]$$

لإيجاد أقصى مدى لأسفل نضع $\sin(2\theta - \alpha) = 1$

$$(R_{down.})_{\max} = \frac{u^2}{g \cos^2 \alpha} (1 + \sin \alpha) \quad (B)$$

$$\therefore \frac{(R_{down.})_{\max}}{(R_{up.})_{\max}} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

حل آخر: يمكن صياغة المثال (2) علي الصورة: إذا كانت سرعة القذف واحدة، اثبت

أن النسبة بين أقصى مدي لقذيفة أعلي مستوي مائل، وأقصى مدي للقذيفة أسفل

المستوي هو $(1 - \sin \alpha) / (1 + \sin \alpha)$.

$$R_{um} = \frac{u^2 / g}{1 + \sin \alpha} , \quad \text{أقصى مدي لأعلي}$$

$$R_{dm} = \frac{u^2 / g}{1 - \sin \alpha} \quad \text{أقصى مدي لأسفل}$$

$$\therefore \frac{R_{um}}{R_{dm}} = (1 - \sin \alpha) / (1 + \sin \alpha)$$

مثال(3): يقذف جسيم بالسرعة الابتدائية V علي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية α ، فإذا كان t_1, t_2 زمني طيران من نقطة القذف مطابقين لأي مدي معطي أقل من أقصى مدي. فاثبت أن المقدار $(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2 \sin \alpha)$ لا يعتمد علي α .

الحل: نفرض أن θ زاوية ميل السرعة الابتدائية V علي المستوي المائل. إذن مركبة السرعة العمودية علي المستوي هي $V \sin \theta$ ، والمركبة في اتجاه المستوي هي $V \cos \theta$. وبالتالي وبدراسة الحركة كما سبق في الأمثلة السابقة، يمكننا الحصول علي زمن الطيران الذي يعطي من:

$$0 = Vt \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 \cos \alpha \quad (1)$$

والمدي المقطوع في الزمن t يكون:

$$R = Vt \cos \theta - \frac{1}{2}t^2 g \sin \alpha \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد أن:

$$Vt \sin \theta = \frac{1}{2}gt^2 \cos \alpha, \quad Vt \cos \theta = R + \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$$

بتربيع المعادلتين الأخيرتين والجمع نحصل علي:

$$\begin{aligned} V^2 t^2 &= R^2 + \frac{1}{4}g^2 t^4 \cos^2 \alpha + \frac{1}{4}g^2 t^4 \sin^2 \alpha + gRt^2 \sin \alpha \\ &= R^2 + \frac{1}{4}g^2 t^4 + gRt^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}g^2 t^4 + (gR \sin \alpha - V^2)t^2 + R^2 = 0 \quad \text{أو}$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في t ، جذراها t_1, t_2 ، إذن

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{V^2 - gR \sin \alpha}{g^2/4} = \frac{4V^2}{g^2} - \frac{4R \sin \alpha}{g}, \quad (3)$$

وأیضا

$$t_1^2 t_2^2 = R^2 \left/ \frac{1}{4} g^2 = 4R^2 / g^2 \right. \therefore t_1 t_2 = 2R / g \quad (4)$$

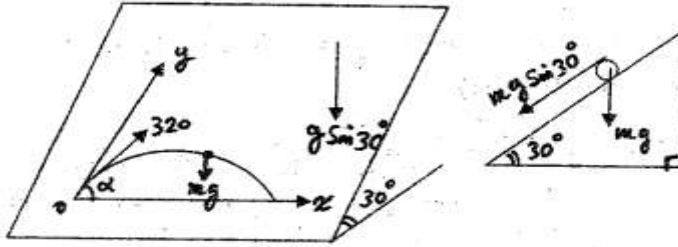
ومن (3)، (4) نحصل علي: $t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \sin \alpha = 4V^2 / g^2$

أي أن المقدار في الطرف الأيسر لا يعتمد علي α ، حيث إن الطرف الأيمن ليس دالة في α ؛ إذ أن V ، g كميات معلومة، وثابتة.

مثال (4): قذفت نقطة مادية علي مستوي أملس يميل علي الأفقي بزاوية 30° في اتجاه

يصنع زاوية 60° مع خط أكبر ميل بسرعة 320 قد/ث، فإذا كانت النقطة المادية لا تترك المستوي. أوجد معادلة المسار، واستنتج منها أقصى ارتفاع.

الحل: بما أن النقطة المادية لا تترك المستوي، فهي تتحرك بعجلة هي مركبة عجلة التماثل في اتجاه المستوي، وتكافئ $g \sin 30^\circ$. نتخذ خط أكبر ميل محورا للصادات، والأفقي الواقع في المستوي من نقطة القذف محورا للسيئات.



معادلات الحركة:

$$\ddot{x} = 0 \quad (1) \quad \ddot{y} = -g \sin 30^\circ \quad (2)$$

$$\dot{x} = 320 \sin 60^\circ = 160\sqrt{3} \quad (3) \quad \dot{y} = 160 - 16t \quad (4)$$

$$x = 160\sqrt{3}t \quad (5) \quad y = 160t - 8t^2 \quad (6)$$

بحذف الزمن بين x ، y من المعادلتين (5) و (6)، لنحصل على معادلة المسار:

$$x/\sqrt{3} - x^2/9600 = y \quad (7)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ وأقصى ارتفاع هو النهاية العظمي للإحداثي y ؛ أي عندما

$$y' = 0$$

$$\therefore 1/\sqrt{3} - x/4800 = 0 \therefore x = 4800/\sqrt{3} \text{ ft}$$

و من (7) نحصل على أقصى ارتفاع

$$y_{\max} = 4800/3 - 2400/3 = 800 \text{ ft}.$$

تمارين (2-3)

(المقذوفات علي المستوي المائل)

(1) قذفت نقطة مادية علي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية 30° في اتجاه يصنع زاوية 30° مع خط أكبر ميل بالسرعة 350 م/ث. فإذا علم أن النقطة المادية لا تترك المستوي. أوجد معادلة المسار واستنتج منها أقصى ارتفاع.

(2) قذفت نقطة مادية بالسرعة 1280 م/ث في اتجاه يصنع الزاوية 75° مع الأفقي، أوجد المدى علي المستوي الذي يميل علي الأفقي بالزاوية 45° إذا كان القذف أعلي وإلى أسفل المستوي المائل.

(3) قذيفة تقذف من نقطة علي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية β في المستوي الرأسي المار بخط أكبر ميل وكان اتجاه القذف يعمل زاوية α مع المستوي المائل؛ وتعطي بالعلاقة $2 \tan \alpha = \cot \beta$. اثبت أن المدى علي المستوي المائل هو $\frac{2V_0^2 \sin \beta}{g(1 + 3 \sin^2 \beta)}$ ، حيث V_0 سرعة القذف.

(4) أوجد السرعة مقدارا واتجاهها لقذيفة إذا علمت أن مداها علي المستوي الأفقي - المار بنقطة القذف - كان 17 مترا، وأن أقصى ارتفاع لها عن هذا المستوي كان - أيضا - 17 م. أوجد كذلك زمن الطيران وزاوية القذف الأخرى التي تعطي نفس المدى. أوجد زاوية القذف التي تعطي أكبر مدي لنفس القذيفة علي مستوي مائل بزاوية $\tan^{-1}(3/4)$ علي الأفقي، وأوجد هذا المدى.

(5) قذفت نقطة مادية بسرعة u أعلي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية $\pi/6$ في المستوي الرأسي - المار بخط أكبر ميل - فكان اتجاهها عند اصطدامها بالمستوي عموديا عليه. اثبت أن المدى علي المستوي المائل هو $4u^2/7g$.

(6) أطلقت قذيفة من أسفل نقطة في مستوي يميل علي الأفقي بزاوية 2β نحو أعلي نقطة به، فإذا كانت زاوية القذف β مع الرأس وسرعة القذف $V_0 \cos \beta$ اثبت أن (i) زمن القذف V_0/g ، (ii) المدى علي المستوي المائل $V_0^2/2g$ ، (iii) سرعة القذف

الباب الثالث

عند اصطدامها بالمستوي $V_0 \sin \beta$ ، (iv) اتجاه القذيفة قد تغير بزاوية 90° أثناء حركتها.

(7) قذف مدفع - مثبت علي مستوي مائل - قذيفتين علي التتابع في مستوي رأسي واحد يحتوي خط أكبر ميل للمستوي، وفي اتجاهين متعامدين. اثبت أن الفرق بين قيمتي المدى علي المستوي المائل ثابت في الحالتين.

(8) قذف جسيم بسرعة 600 م/ث في اتجاه يصنع زاوية 60° مع الأفقي من قاعدة مستوي يميل بزاوية 30° . أوجد المدى علي المستوي المائل وزمن الطيران.

(9) قذفت نقطة مادية بسرعة V في اتجاه يصنع 75° مع الأفقي من قاعدة مستوي يميل علي الأفقي بزاوية 30° . أين تقابل النقطة المستوي؟ وأوجد أكبر مدي علي المستوي المائل.

(10) مستوي يميل علي الأفقي بزاوية 30° . من نقطة علي هذا المستوي قذف جسيما بنفس السرعة واتجاه القذف لكل منهما يصنع زاوية 45° مع الأفقي، أحدهما إلي أعلي والثاني إلي أسفل المستوي. اثبت أن المدى علي المستوي لأحد الجسيمين يساوي $15/4$ المدى علي نفس المستوي للجسيم الثاني.

(11) أكبر مدي علي المستوي الأفقي 5000 ياردة، أوجد أكبر مدي للمقذوف علي مستوي يميل بزاوية 45° ، كذلك أوجد أكبر مدي إذا قذف المقذوف أسفل المستوي.

(12) اكتب معادلة المسار علي المستوي المائل، ثم استنتج منها المعادلة المناظرة علي المستوي الأفقي.

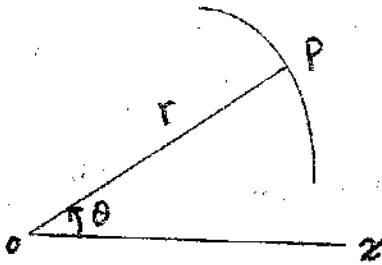
$$\left[\left\{ x - \frac{u^2}{g \cos^2 \beta} \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha \right\}^2 = - \frac{2u^2 \cos^2(\alpha - \beta)}{g \cos \beta} \cdot \left\{ y - \frac{u^2}{2g \cos \beta} \sin^2(\alpha - \beta) \right\} \right]$$

الباب الرابع

الحركة في دائرة Motion a Circle

في هذا الباب سوف ندرس - بتوفيق الله تعالى - حركة نقطة مادية (جسيم) في مستوي بحيث تصف الحركة دائرة أفقية أو رأسية تحت تأثير الجاذبية. ونبدأ بالسرعة الزاوية.

السرعة الزاوية:



نفرض أن P هو موضع

النقطة المادية المتحركة في

المستوي عند اللحظة الزمنية

t ، وأن O نقطة ثابتة في المستوي.

وكان المستقيم ox ثابتا في

المستوي. فإن السرعة الزاوية

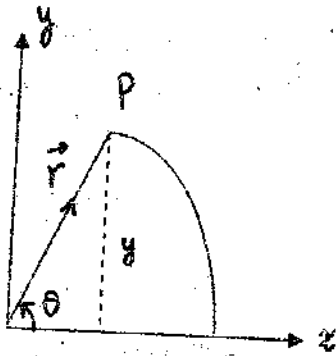
لنقطة المادية حول O تعرف

بأنها معدل تغير الزاوية $p\hat{ox}$ بالنسبة للزمن، وتقاس دائما بالزاوية النصف قطرية (التقدير الدائري) في الثانية. وحيث إن $P\hat{OX} = \theta$ فإن السرعة الزاوية للنقطة P حول O هي $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$. ويقال إن النقطة المادية تتحرك في المستوي

بسرعة زاوية منتظمة حول نقطة O إذا كانت $\theta = \omega$ ثابتة، وفي هذه الحالة يمسح نصف القطر المتجه $\vec{OP}$ زوايا متساوية في أزمنة متساوية (وهذه نتيجة مشهورة تختص بها الحركة المستوية).

سرعة وعجلة نقطة مادية تتحرك في دائرة:

باتخاذ مركز الدائرة كنقطة أصل، ونفرض أن a = نصف قطر الدائرة، $\vec{r}$ متجه موضع النقطة المادية بعد مضي زمن قدره t ، وكان po يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإن:



$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ &= a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}\end{aligned}\quad (1)$$

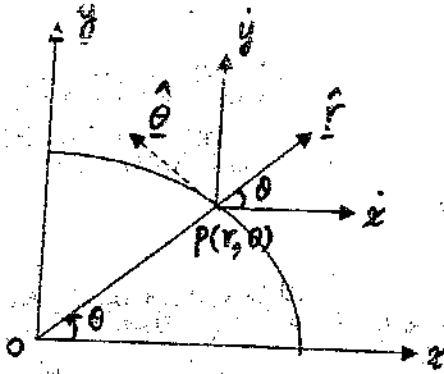
$$\begin{aligned}\therefore \vec{v} &= \dot{\vec{r}} \\ &= -a\dot{\theta}\sin\theta\hat{i} + a\dot{\theta}\cos\theta\hat{j}\end{aligned}\quad (2)$$

حيث $\dot{\theta}$ هي السرعة الزاوية للنقطة المادية عند P حول نقطة O ، وكذلك العجلة $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\begin{aligned}&= (-a\cos\theta\hat{i} - a\sin\theta\hat{j})\ddot{\theta} + (-a\sin\theta\hat{i} + a\cos\theta\hat{j})\dot{\theta}^2 \\ &= a(-\ddot{\theta}^2\cos\theta - \dot{\theta}\sin\theta)\hat{i} + a(-\ddot{\theta}^2\sin\theta + \dot{\theta}\cos\theta)\hat{j}\end{aligned}\quad (3)$$

ومن (2)، (3) نلاحظ أن مركبات السرعة والعجلة، التي حصلنا عليها تواءم إلى التعقيد. ويمكن تبسيط هذه النتائج إذا أوجدناها باستخدام الإحداثيات المماسية (الذاتية) بدلا من الكرتيزية. بمعنى أنها في اتجاه تزايد نصف القطر $(\vec{r})$ وفي الاتجاه العمودي عليه (المستعرض؛ اتجاه المماس)، أي اتجاه تزايد الزاوية θ .



أولاً: مركبتا السرعة:

من (2) نجد أن مركبتي السرعة

$\vec{v}$ هما:

$$\dot{x} = -a\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = a\dot{\theta} \cos \theta$$

إذن، مركبة $\vec{v}$ في اتجاه نصف

القطر هي:

$$v_r = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = -a\dot{\theta} (\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta) = 0$$

$$\therefore v_r = 0$$

(4)

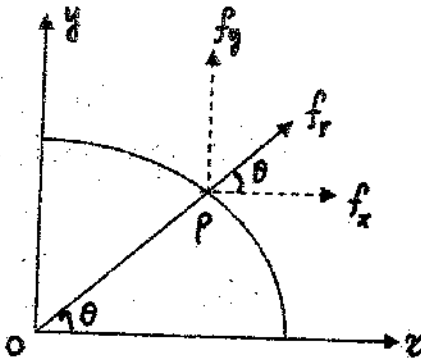
وتكون مركبة $\vec{v}$ في اتجاه المماس (تزايد θ) هي:

$$v_\theta = \dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta = a\dot{\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a\dot{\theta} \quad (5)$$

$$\therefore \vec{v} \equiv (0, a\dot{\theta})$$

ثانياً مركبتا العجلة:

من (3) نجد أن:



$$f_x = -a\dot{\theta}^2 \cos\theta - a\ddot{\theta} \sin\theta$$

$$f_y = -a\dot{\theta}^2 \sin\theta + a\ddot{\theta} \cos\theta$$

إذن مركبة العجلة في اتجاه تزايد

نصف القطر هي:

$$f_r = a_x \cos\theta + a_y \sin\theta$$

$$\begin{aligned} &= -a\dot{\theta}^2 \cos^2\theta - a\ddot{\theta} \sin\theta \cos\theta - a\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + a\ddot{\theta} \sin\theta \cos\theta \\ &= -a\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

وكذلك مركبة العجلة في اتجاه تزايد θ (اتجاه المماس) هي:

$$f_\theta = a_y \cos\theta - a_x \sin\theta$$

$$\begin{aligned} &= -a\dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta + a\ddot{\theta} \cos^2\theta + a\dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta + a\ddot{\theta} \sin^2\theta \\ &= a\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\therefore \vec{f} = (-a\dot{\theta}^2, a\ddot{\theta}) = \left(-\frac{v^2}{a}, \frac{dv}{dt}\right)$$

$$= \left(-\frac{v^2}{a}, \frac{v dv}{a d\theta}\right)$$

والإشارة السالبة تعني أن العجلة النصف قطرية تكون إلى الداخل.

حالة خاصة: إذا تحركت النقطة المادية بسرعة زاوية منتظمة ω ، فإن السرعة v تكون ثابتة، ويقال: إن المتحرك يسير بإطلاق منتظم $v = r\omega$ ، وعلى ذلك

فإن $dv/dt = 0$ ؛ أي أن عجلة المتحرك تكون لها مركبة واحدة فقط، وهي

المركبة النصف قطرية إلى الداخل وتكافئ $a\omega^2 \leftarrow \frac{v^2}{a}$ ؛ أي أن:

$$\frac{v^2}{a} = a\omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{v}{a} \quad (*)$$

مثال (1): كتلة مقدارها 5kg، تتحرك على مستوى أفقي أملس بسرعة 8 م/ث، ومتصلة بطرف خيط غير مرن طوله 4م، والطرف الآخر للخيط مثبت في المستوى. أوجد الشد في الخيط؟

الحل:

$$\therefore v = 8 \text{ m/Sec}, \quad a = 4 \text{ m.}$$

$$\therefore \frac{v^2}{a} = 64/4 = 16 \text{ m/Sec}^2 = \text{إذن العجلة في اتجاه النقطة الثابتة}$$

$$\therefore a\omega^2 = 16 \text{ m/Sec}^2$$

$$\text{الشد في الخيط} = m a \omega^2 = 5 \times 16 = 80 \text{ N}$$

مثال (2): وضع جسيم كتلته 3kg فوق منضدة ملساء وربط بخيط غير مرن طوله 1.2m إلى نقطة ثابتة في النضد. فإذا دار الخيط 300 rev/min حول النقطة الثابتة. أوجد الشد في الخيط؟

الحل:

$$\text{عدد الدورات} \equiv n = 300 \text{ rev/min}, = 5 \text{ rev/Sec.}$$

$$\text{السرعة الزاوية} \equiv \omega = n \times 2\pi = 5 \times 2\pi = 10\pi \text{ rad/Sec.}$$

أي أن السرعة الزاوية حول مركز دائرة تساوي ضعف سرعتها الزاوية حول نقطة علي محيطها.

مثال (4): ربط جسيم بخيط مرن طوله 30 سم إلي نقطة ثابتة فوق نضد أفقي أملت بحيث يتحرك الجسيم في دائرة حول النقطة الثابتة بسرعة ثابتة. فإذا كان معامل مرونة الخيط يساوي وزن الجسيم، وكان عدد الدورات 20 دوره في الدقيقة. بين أن الاستطالة في الخيط تكون 5 سم تقريبا؟

الحل:

نفرض أن كتلة الجسيم هي mg ، وعدد الدورات

$$n = 20 \text{ rev/min} = \frac{1}{3} \text{ rev/sec.}$$

$$\text{السرعة الزاوية} \equiv \omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/sec}$$

نفرض أن طول الخيط أثناء الحركة هو x متراً، إذن الشد في الخيط يكون

$$\therefore T = m a \omega^2 = m x \frac{4\pi^2}{9} N \quad (1)$$

$$\Delta x = x - 0.3 = \text{الاستطالة في الخيط}$$

وحيث إن معامل المرونة = وزن الجسيم؛ فإن $\lambda = mg$ ، إذن الشد في الخيط (من قانون هوك) يكون:

$$T = \frac{mg}{0.3} (x - 0.3) \quad (2)$$

ومن (1)، (2) نجد أن:

$$\frac{mg}{0.3}(x - 0.3) = mx \frac{4\pi^2}{9}$$

$$\therefore x = 0.35 \Rightarrow \text{الانزياح} \Delta x = 0.35 - 0.3 = 0.05 \text{ m. } x = 0.5 \text{ cm}$$

مسائل محلولة على الحركة في دائرة

(1) وصلت نقطتان متساويتان في الكتلة بخيط غير مرن يمر بثقب في منضدة ملساء. أوجد عدد الدورات في الدقيقة التي يجب أن تدورها النقطة المادية الموجودة على المنضدة في دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}$ قدم حتي تبقى النقطة المعلقة

في حالة سكون؟

الحل

معادلة حركة النقطة المعلقة

$$T = mg \quad (1)$$

معادلة حركة النقطة الموضوعة

على المنضدة

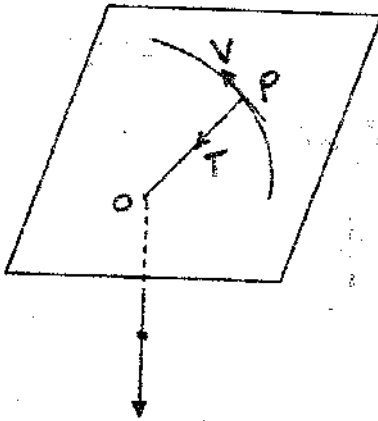
$$m \frac{v^2}{a} = T \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{v^2}{a} = g$$

$$\therefore v = a\dot{\theta} = a\omega, (\dot{\theta} \text{ منتظمة})$$

$$\therefore \omega^2 = g/a, \therefore g = 32 \text{ ft./Sec.}, a = \frac{1}{2} \text{ ft.}$$

$$\therefore \omega = 8 \text{ rad/Sec.}, \therefore \omega = 2\pi\nu$$

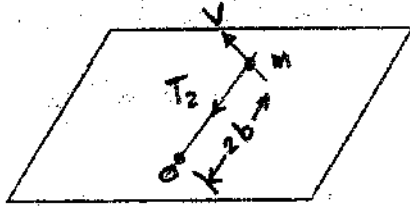


$$\text{عدد الدورات في الثانية} \equiv \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi} \text{ Cycle/Sec}$$

$$\text{عدد الدورات في الدقيقة} \equiv \nu = \frac{240}{\pi} \text{ Cycle/min}$$

(2) وصلت نقطة مادية بطرف خيط مرن طوله الطبيعي a وثبت طرفه الثاني بنقطة في نضد أفقي أملس، فإذا علم أن وزن النقطة المادية يكفي لإحداث استطالة تكافئ نصف طول الخيط الطبيعي إذا علق الخيط رأسياً. أوجد السرعة التي يجب أن تقذف بها نفس النقطة المادية، وزمن الدورة الكاملة حتى تدور النقطة في دائرة أفقية نصف قطرها يكافئ ضعف طول الخيط؟

الحل:



الشّد في الحالة الأولى (حيث تعلق النقطة المادية رأسياً):

$$\therefore T_1 = mg,$$

عندما يمتد الخيط ليصبح مرة ونصف طوله

$$T_2 = \lambda \frac{l - l_0}{l_0} = \lambda \frac{(b + b/2) - b}{b} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \lambda = 2mg$$

(1)

معادلة الحركة: عندما يمتد الخيط ليصبح ضعف طوله عند الدوران على المنضدة

$$m \frac{V^2}{a} = T_2, \therefore V = a\omega = \omega, \quad a \equiv 2b$$

$$\therefore m(2b)^2 \omega^2 / 2b = T_2 = 2mb\omega^2$$

$$\therefore T_2 = \lambda \frac{2b - b}{b} = \lambda \quad \therefore \lambda = 2mb\omega^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \omega^2 = g/b \quad \therefore \omega = \sqrt{g/b}$$

$$\therefore V = a\omega = (2b)\sqrt{g/b} = 2\sqrt{bg}$$

$$\therefore w = 2\pi v = 2\pi/\zeta; \quad \zeta \equiv \text{الزمن الدوري}$$

$$\therefore \zeta = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{b/g}$$

(3) وصلت نقطتان ماديتان، كتلتاهما m_1, m_2 بنهايتي خيط غير مرن يمر بحلقة ملساء مثبتة في نضد أفقي أملس. قذفت النقطتان بالسرعتين V_1, V_2 في الاتجاه العمودي على جزأي الخيط. اثبت أن الحلقة تقسم الخيط بنسبة $m_1 V_1^2 : m_2 V_2^2$ حتى يظل الخيط مشدوداً، وكل نقطة ترسم دائرة حول الحلقة؟

الحل:

$$\therefore V_1 = a_1 \omega_1, \quad V_2 = a_2 \omega_2$$

$$\therefore \omega_1 = V_1/a_1, \quad \omega_2 = V_2/a_2 \quad (1)$$

من معادلات الحركة

$$\therefore a_1/a_2 = \frac{m_2 \omega_2^2}{m_1 \omega_1^2} = \frac{m_2 (V_2/a_2)^2}{m_1 (V_1/a_1)^2} = \frac{m_2 a_1^2 V_2^2}{m_1 a_2^2 V_1^2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{m_2 a_1 V_2^2}{m_1 a_2 V_1^2} \quad \therefore \frac{m_2 a_1 V_2^2}{m_1 a_2 V_1^2} = 1$$

$$\therefore a_1/a_2 = m_1 V_1^2 / m_2 V_2^2$$

(4) وصفت نقطة مادية كتلتها 8 باوند بنهاية خيط غير مرن طوله 4 ft، وثبت الطرف الثاني للخيط في النقطة O من نضد أفقي أملس، فإذا علم أن الخيط يدور حول O 300 دورة في الدقيقة، فأوجد الشد في الخيط؟

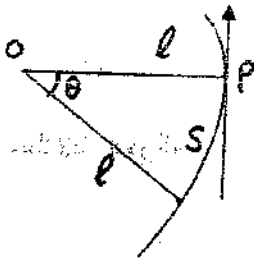
الحل:

$$\text{عدد الدورات في ث} \equiv \nu = \frac{300}{60} = 5 \text{ rev/Sec}, \therefore \omega = 2\pi\nu$$

$$\therefore \omega = 10\pi \text{ rad/Sec}$$

$$\therefore T = m.a\omega^2 = 8 * 4 * (10\pi)^2 = 3200 \pi^2 \text{ pld}$$

(5) عربة تتحرك علي محيط دائرة نصف قطرها 3.6 m في اتجاه عكس عقارب الساعة. إذا كان طول القوس المقطوع في زمن t يعطي بالعلاقة $S = t^3 + 3$ ، أوجد السرعة والعجلة عند $t = 3 \text{ Sec}$ ؟



الحل:

عندما تكون θ بالتقدير الدائري، فإن $S = a\theta$

$$\vec{v} \equiv (o, l\dot{\theta}) \equiv (o, \dot{S}),$$

$$\vec{f} \equiv (-l\dot{\theta}^2, a\ddot{\theta}) \equiv \left(-\frac{\dot{S}^2}{l}, \ddot{S}\right). \quad \text{اكمل عند } t=3$$

الحركة الدائرية لنقطة متصلة بخيط:

أ- البندول البسيط: (simple Pendulum)

عندما يتصل جسم ثقيل في أحد طرفي خيط خفيف، بينما تثبت النهاية الأخرى، ويتذبذب الجسم في دائرة (أو جزء من دائرة) راسية حول أسفل نقطة في المسار، في هذه الحالة يطلق علي هذا النظام بالبندول البسيط.

نفرض أن موضع الجسم

عند أي لحظة t . ونفرض أن

$\angle POA = \theta < 90^\circ$ نقطة ثابتة،

$l = OA$ هو نصف القطر الراسي

بار بالنقطة O . ونفرض أن

$\overline{AP} = s$ ، إذن مركبتا عجلة

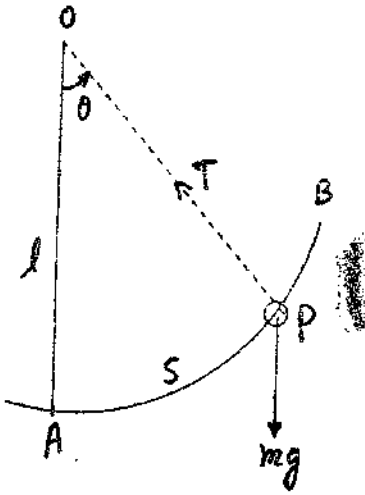
الجسم في اتجاه عمودي

عند P هي V^2/l حيث

$ds/dt = V$ ، $l =$ طول

الخيط الخفيف. القوي المؤثرة

علي الجسم تتمثل في وزنه راسيا لأسفل، والشد في الخيط T ويعمل في الاتجاه $\overline{PO}$. إذن معادلة الحركة في اتجاه المماس عند P هي:



$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad \text{or} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta.$$

إذا كانت القيمة $\theta = s/l$ صغيرة، فإن $\sin \theta = \sin s/l \approx s/l$

$$\therefore \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s$$

وهذه المعادلة تصف حركة الجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة؛ سرعتها الزاوية $\omega = (g/l)^{1/2}$ ، وزمنها الدوري هو $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. وجدير بالذكر أن هذه العلاقة البسيطة تمكننا من حساب عجلة الجاذبية الأرضية - بطريقة سهلة جدا - من الزمن الدوري T وطول البندول l .

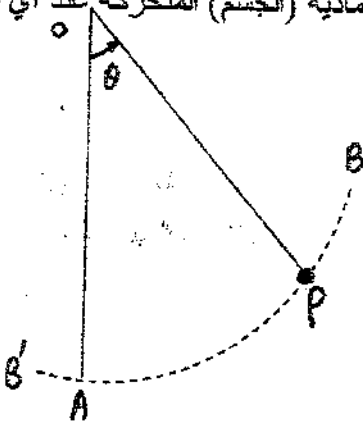
مثال (1): يتذبذب بندول بسيط بزاوية α حول موضع الاتزان، بين أن الزمن الدوري للذبذبة يعطي بالعلاقة $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}(1 + 4 \sin^2 \alpha/2)}$ ، وذلك إذا كانت α صغيرة جدا بحيث يمكن إهمال $\sin^4 \alpha/2$ والقوي الأعلى منها؟

الحل:

نفرض أن O نقطة التعليق، m كتلة الجسم المعلق $l =$ طول الخيط. ونفرض أن A هي أسفل موضع، P موضع النقطة المادية (الجسم) المتحركة عند أي لحظة بحيث $\angle POA = \theta$

معادلة الحركة:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$



بيث $S = l\theta$ بالتكامل مع اعتبار

$$\dot{\theta} = 0 \text{ at } \theta = \alpha$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{4g}{l} (\sin^2\alpha/2 - \sin^2\theta/2)$$

بفصل المتغيرات والتكامل، حيث t هو الزمن من A إلى $\theta = \alpha$ ، ووضع

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \sin\phi \quad \text{فإن:}$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\phi}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} (1 + \frac{1}{2} \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\phi + \dots) d\phi$$

بإهمال القوي الأعلى للمقدار $\sin\alpha/2$ فنحصل على:

$$\therefore t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{4} \sin^2\alpha/2)$$

ويكون زمن الذبذبة الواحدة هو:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{4} \sin^2\alpha/2)$$

مثال (2): نقطة مادية معلقة في وضع رأسي بواسطة خيط غير مرن، قذفت من وضع الاتزان في اتجاه أفقي بالسرعة التي تكتسبها لو سقطت من أعلي نقطة

في دائرة. بين أن الزمن اللازم لكي تصنع زاوية θ مع وضع الاقتران هو

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \log(\sec \theta/2 + \tan \theta/2)$$

الحل:

باعتبار أن موضع حركة النقطة المادية - كما في المثال السابق - نجد أن معادلة الحركة تأخذ الشكل التالي

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \theta \quad (1)$$

وإذا كانت u هي سرعة الجسيم عند أسفل نقطة

$$\therefore u^2 = 4gl \quad \text{or} \quad \omega^2 = -4g/l \quad (2)$$

حيث ω هي السرعة الزاوية للنقطة المادية عند $\theta = 0$. بتكامل (1) مع استخدام (2):

$$\therefore (d\theta/dt)^2 = \frac{4g}{l} \cos^2 \theta/2 \therefore dt = \frac{1}{2} \sqrt{l/g} \sec \theta/2 \cdot d\theta$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \sqrt{l/g} \int_0^\theta \sec \frac{\theta}{2} d\theta = \sqrt{\frac{l}{g}} \log(\sec \frac{\theta}{2} + \tan \theta/2)$$

مسائل محلولة على البندول البسيط

(1) استنتج معادلتى البندول البسيط على الصورة: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

حيث $T = (1 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2})mg$ هي الزاوية الصغيرة بين الخيط والمحور الراسي. وإذا بدأ البندول التذبذب من سكون عندما كانت $\theta = \theta_0$ فاحسب الشد في الخيط؟

الحل: معادلتا الحركة في اتجاه الخيط والمماس للدائرة، التي نصف قطرها l ومركزها O - كما بالشكل - هما:



$$m(-l\dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - T, \quad (1)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (2)$$

بما أن θ صغيرة فإن $\sin \theta \approx \theta$ ، $\cos \theta \approx 1$ ، ومن (2)

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة، والسرعة الزاوية لها هي $\omega = \sqrt{g/l}$ والشد

$$T = mg(1 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega^2})$$

في الخيط يكون

ومن الشروط الابتدائية؛ وهي $\dot{\theta} = 0$ ، $\theta = \theta_0$ ، $At t = 0$. فإن:

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t, \dot{\theta} = -\theta_0 \omega \sin \omega t \therefore T = mg(1 + \theta_0^2 \sin^2 \omega t)$$

$$\text{الزمن الدوري} \equiv \zeta = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(2) بندول بسيط مكون من كتلة m ، وخيط طوله l . فإذا كانت نقطة التعليق تتحرك بعجلة γ فاثبت أن الزمن الدوري ζ يعطي الآتي:

أ- إذا كانت γ رأسية لأعلى، $\zeta_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \gamma}}$

ب- إذا كانت γ رأسية لأسفل، $\zeta_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - \gamma}}$ ، $g > \gamma$.

ج- إذا كانت γ أفقية، $\zeta_3 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + \gamma^2}}}$ ، ثم بين أن الكتلة في هذه

الحالة تتذبذب حول الموضع الزاوي $\theta = -\alpha$ حيث $\gamma \gg g$ ؟

الحل:

أ- إذا كانت نقطة التعليق O متحركة بعجلة γ رأسياً لأعلى، فإن المعادلة الثانية - في اتجاه المماس - لحركة البندول تكون على الصورة:

$$ml\ddot{\theta} + m\gamma \sin\theta = -mg \sin\theta$$

ولما كانت θ صغيرة فإن: $\ddot{\theta} + \frac{\gamma + g}{l} \theta = 0$ وهذه أيضاً معادلة حركة توافقية

بسيطة، زمنها الدوري هو $\zeta_1 = 2\pi \sqrt{l/(g + \gamma)}$.

ب- بالمثل إذا كانت γ رأسية لأسفل، θ صغيرة فإن: $\ddot{\theta} + \frac{g-\gamma}{l}\theta = 0$ فإذا كان $g > \gamma$ ، فإن هذه المعادلة تصف حركة توافقية بسيطة، زمنها الدوري هو $\zeta_2 = 2\pi\sqrt{l/(g-\gamma)}$.

ج- إذا كانت γ أفقية، فإن: $m\ddot{\theta} + m\gamma\cos\theta = -mg\sin\theta$ إذا كانت $\sin\alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{g^2 + \gamma^2}}$ ، فإن:

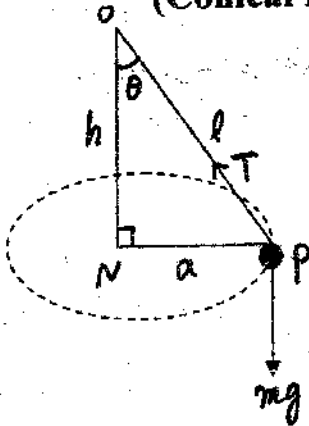
$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{\sqrt{g^2 + \gamma^2}}{l}\sin(\theta - \alpha) = 0$$

وإذا كانت $g \gg \gamma$ حيث θ صغيرة، فإن: $\sin(\theta + \alpha) \cong (\theta + \alpha)$ ، بوضع

$\phi = (\theta + \alpha)$ ، نجد أن $\ddot{\phi} + \frac{\sqrt{g^2 + \gamma^2}}{l}\phi = 0$ ، وهذه تبين أن ϕ تؤدي حركة

توافقية بسيطة، زمنها الدوري هو $\zeta_3 = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2 + \gamma^2}}$ ومعني ذلك أن الزاوية θ تؤدي حركة تنبؤية حول الموضع $\theta = -\alpha$.

ب- البندول المخروطي: (Conical Pendulum)



إذا ربط جسيم بطرف خيط،

وثبت الطرف الآخر في نقطة

ثابتة O، وتحرك الجسيم في

دائرة أفقية. فإن الخيط

يصف مخروطاً محوره

هو سبط الرأسى المر بالنقطة O ، الخيط والجسيم تكون ما يسمى بالبندول المخروطى. وهذه الحركة من أمثلة حركة نقطة مادية في دائرة بسرعة زاوية منتظمة. وتكون النقطة المادية تحت تأثير قوتين هما وزنها والشد في الخيط. إذن يفرض أن النقطة المادية تدور بسرعة زاوية منتظمة ω حول مركز الدائرة N . وأن طول الخيط l ، ويصنع مع الرأسى ON (h ارتفاع المخروط) زاوية θ ، وأن a نصف قطر الدائرة. وكما بالشكل: وزن النقطة المادية mg رأسياً لأسفل، والشد في الخيط T في اتجاه $\overline{PO}$.

معادلات الحركة:

(A) في اتجاه نصف القطر للداخل:

$$ma\omega^2 = T \sin\theta \quad \text{or} \quad m(l \sin\theta)\omega^2 = T \sin\theta \quad (1)$$

(B) في اتجاه المماس: (حيث لا توجد عجلة في اتجاه المماس)

$$\therefore 0 = T \cos\theta - mg \quad \text{or} \quad T \cos\theta = mg \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow T = m l \omega^2 = m l (2\pi v)^2 = 4\pi^2 v^2 m l \quad (3)$$

حيث v = عدد الدورات في الثانية الواحدة (التردد). من (3) في (2) نحصل على:

$$\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g}{l\omega^2}, \quad \therefore h = l \cos\theta \quad \therefore h = \frac{g}{\omega^2} \quad (4)$$

ومن (4) نلاحظ أن العمق الرأسى للنقطة P تحت O لا يعتمد على طول الخيط، ولكن يعتمد فقط على مربع السرعة الزاوية. والآن باستخدام سرعة حركة الجسيم v بدلا من السرعة الزاوية ω ، فيكون:

$$\therefore 4a\omega^2 = T \sin\theta, \quad (1) \quad 4g = T \cos\theta \quad (2)$$

$$\therefore \omega = 2\pi v, \quad (1) \Rightarrow T \sin\theta = 4(0.6 \sin\theta)4\pi^2 v^2$$

$$\therefore T = 16 * 0.6 v^2 \pi^2 = 9.6 v^2 \pi^2 ; v = \text{عدد الدورات في ث}$$

بما أن أقصى قيمة للشد هي 400N فإن:

$$\therefore 400 = 9.6 v^2 \pi^2$$

$$v^2 \pi^2 = \frac{400}{9.6} = 41.7, \quad \text{let } \pi^2 \approx 10$$

$$v^2 = 4.17 \quad \therefore v = 2.04 \text{ rev / Sec} \equiv \text{عدد الدورات في ث}$$

مثال (3): وصلت نقطة مادية كتلتها 8 باوند بطرف خيط مرن طوله الطبيعي

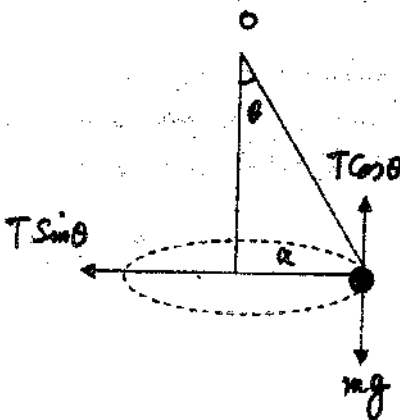
3 أقدام، فإذا علم أن الخيط يستطيل بقدر $\frac{1}{2}$ قدم في الحركة كبندول مخروطي

يدور 40 دورة في الدقيقة. اثبت أن الخيط يستطيل بقدر $\frac{18}{7\pi^2}$ إذا علق تعليقاً

حراً؟

الحل:

أولاً: دراسة الحركة كبندول مخروطي:



$$ma\omega^2 = T \sin\theta \quad (1)$$

حيث $a = \text{نصف قطر المخروط}$

$$\therefore a = l \sin \theta = \left(3 + \frac{1}{2}\right) \sin \theta$$

$$= \frac{7}{2} \sin \theta$$

$$\text{عدد النورات} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \therefore \omega = \frac{4\pi}{3}$$

بالتعويض عن ω, a في (1) لنحصل على:

$$T_1 = 28 * 16 * \pi^2 / 9 \quad (1')$$

$$\therefore T_1 = \lambda \frac{l - l_0}{l_0} = \lambda / 6 \quad (2)$$

من (2) في (1)' فإن:

$$\lambda = \frac{56 * 16}{3} \pi^2 \quad (3)$$

ثانياً عند التعليق الحر:

$$T_2 = \lambda \frac{d}{3} ; \quad d \equiv \text{الاستطالة}$$

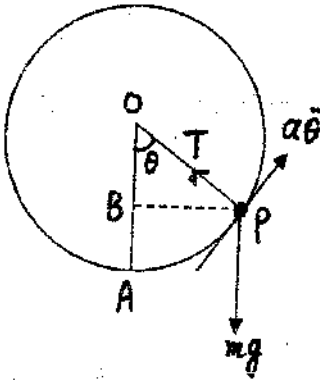
$$\therefore T_2 = mg = 8 * 32 = 256 \therefore \frac{\lambda d}{3} = 256 \quad (4)$$

بحذف λ من (3)، (4) لنحصل على d :

$$\therefore d = 3 * 256 / \frac{56 * 16 \pi^2}{3} = \frac{18}{7 \pi^2}$$

حركة نقطة مادية متصلة بخيط في دائرة رأسية:

(Motion of a suspended particle in a vertical circle)



نقطة مادية كتلتها m ، ربطت

في خيط غير مرن، وثبت الطرف

الأخر في النقطة O . فإذا قذفت

هذه النقطة بالسرعة الابتدائية

u من النقطة A ، بحيث تتم الحركة

في دائرة رأسية. لنفرض أن بعد

مضي الزمن t من بدء الحركة

حلت النقطة المادية عند

الموضع P حيث AOP ، والمسافة الرأسية التي تحركها المقنوف هي:

$$AB = AO - OB = a(1 - \cos\theta)$$

سرعة المتحرك عندئذ هي V حيث $V^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos\theta)$

معادلات الحركة:

$$m \frac{V^2}{a} = T - mg \cos\theta \quad (2)$$

$$ma\ddot{\theta} = -mg \sin\theta \quad (3)$$

بفصل المتغيرات والتكامل والضرب في 2، يمكن الحصول من (3) على سرعة المتحرك بدلالة الإزاحة الزاوية مقيسة من أسفل نقطة في الدائرة، وهي نفس

السرعة الموجودة في المعادلة (1) التي أمكن الحصول عليها من قانون نيوتن $V^2 = V_0^2 - 2gy$. وباعتبار أن حركة النقطة المادية على الدائرة هي نفسها حركة مسقطها على القطر الرأسي في الدائرة. أما الشد في الخيط T فيعطي من العلاقة (2) بعد التعويض عن V^2

$$T = mg \cos \theta + \frac{mu^2}{a} - 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$\therefore T = mg(3\cos \theta - 2) + \frac{mu^2}{a} \quad (4)$$

ولدراسة الحركة يمكن وضع المعادلة (2) على الصورة

$$m \frac{V^2}{a} = 2mg(\cos \theta - 1) + \frac{mu^2}{a} \quad (5)$$

بمقارنة (4)، (5) نستنتج أن $T - m \frac{V^2}{a} = mg \cos \theta$ ، إذن $T > \frac{mV^2}{a}$

طالما كانت $\cos \theta$ موجبة؛ أي

في نصف الدائرة السفلي؛ أي

أن في نصف الدائرة السفلي

لا يتعدم الشد، وبالتالي فإن

الحركة في هذا الجزء من

الدائرة دائما حركة دائرية؛ أي

أن المتحرك لا يترك قوس

الدائرة أبدا. هناك أيضا احتمال



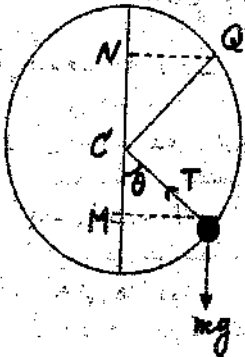
انعدام السرعة V وفي هذه الحالة يعود المتحرك إلى الحركة الدائرية في الاتجاه المضاد.

أيضا في حالة $T < \frac{mV^2}{a}$ أي في النصف الدائري العلوي، في هذه الحالة هناك احتمال لانعدام الشد قبل أن تتعدم السرعة وعندما ينعدم الشد في الخيط يتجلى الحركة الدائرية، وتتحرك النقطة المادية كمقذوف في قطع مكافئ. ولكي تكمل النقطة المادية دورات كاملة يجب أن يكون الشد موجبا في نصف الدائرة العلوي، ولإيجاد أقل سرعة ابتدائية تكفي لأن يكمل المتحرك دورات كاملة نضع $T = 0$ عندما $\theta = \pi$ في المعادلة (4)؛ أي أن:

$$\therefore u = \sqrt{5ag} \quad (6)$$

مثال (1): جسيم كتلته m ، علق في نقطة ثابتة بواسطة خيط غير مرن طوله l . وقذف الجسيم أفقيا بسرعة $2\sqrt{lg}$ عندما كان الخيط رأسيا. أوجد ارتفاع الجسيم فوق نقطة التعليق عندما يرتخي الخيط. أوجد أيضا الشد في الخيط عندما يكون الجسيم على عمق $l/2$ تحت نقطة التعليق؟

الحل:



$$m \frac{V^2}{l} = T - mg \cos \theta \quad (1)$$

$$m \frac{V}{l} \cdot \frac{dV}{d\theta} = -mg \sin \theta \quad (2)$$

من (2) نحصل على:

$$V^2 = 2lg \cos \theta + C$$

$$\text{at } t = 0, \theta = 0, V_0 = 2\sqrt{lg} \Rightarrow C = 2lg$$

$$\therefore V^2 = 2lg(1 + \cos \theta) \quad (3)$$

من (3) في (1) فإن:

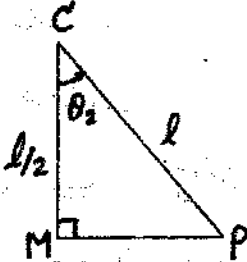
$$\therefore T = mg \cos \theta + \frac{m}{l} \cdot 2lg(1 + \cos \theta)$$

$$\therefore T = 3mg \cos \theta + 2mg \quad (4)$$

عندما يرتخي الخيط يكون $T = 0$ ، إذن من (4) فإن $\cos \theta_1 = -\frac{2}{3}$. أي أن الخيط يبدأ في الارتخاء على بعد زاوية قدره $\cos^{-1} 2/3$ أعلى مستوي مركز الدائرة. ولنعبر أن الجسم عند الموضع Q في هذه اللحظة، إذن الارتفاع فوق نقطة التعليق يكون

$$CN = l \cos(\pi - \theta_1) = -l \cos \theta_1 = -l \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2l}{3}$$

عندما يكون الجسم على عمق $l/2$ تحت نقطة التعليق (حيث M منتصف AC) فيمكن تعيين θ_2 كالآتي (من الشكل):



$$\therefore \cos \theta_2 = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta_2 = 60^\circ \quad (5)$$

ومن (5) في (3) نجد أن

$$V^2 = 2lg(1 + 1/2) = 3lg \quad (6)$$

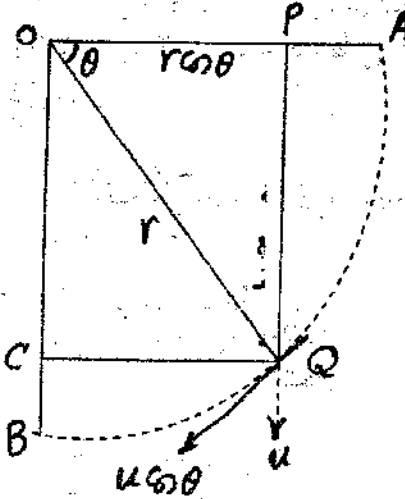
من (6) في (1) لنحصل على الشد في الخيط في هذه الحالة

$$\therefore T = mg \cos \theta + \frac{mV^2}{l} = mg(1/2) + \frac{m}{l} \cdot 3lg = \frac{7}{2}mg$$

مثال (2): ربط جسيم بخيط غير مرن طوله r ووصل الطرف الآخر للخيط في وضع أفقي. بنقطة ثابتة O . في هذا الوضع ترك الجسيم ليسقط من علي بعد $r \cos \theta$ من نقطة O . اثبت أن سرعة الجسيم عندما يكون في موضع رأسي تحت O هي $\sqrt{2gr(1 - \sin^3 \theta)}$ ؟

الحل:

نفرض أن OA أفقي وطوله r ، OB رأسي وطوله r . ونعتبر أن نقطة P علي OA وهي الموضع الذي ترك منه الجسيم ليسقط، وحيث أن $OP = r \cos \theta$



فإن الجسيم يسقط إلي

النقطة Q التي تقع علي

محيط دائرة نصف قطرها

r ومركزها نقطة O ،

OAB ربع هذه الدائرة

كما بالشكل حيث $\angle POQ = \theta$ ،

إذن الجسيم يسقط مسافة رأسية

PQ حيث $PQ = r \sin \theta$ ، إذن

سرعة الجسيم عند Q

(بإستخدام $V^2 = V_0^2 + 2gx$) هي:

$$V^2 = 0 + 2gr \sin \theta = 2gr \sin \theta$$

$$u^2 = 2gr \sin \theta \quad (1)$$

الآن، عندما يصبح الخيط مشدودا فإن السرعة في اتجاه الخيط تنتهي تماما، ويبدأ الجسم الحركة في القوس QB بسرعة تساوي مركبة u العمودية على OQ (نصف القطر)؛ أي بسرعة $u \cos \theta$. فإذا رمزنا لسرعة الجسم عند Q بالرمز v يكون:

$$\therefore v^2 = u^2 \cos^2 \theta \quad (2)$$

من (1) في (2) نجد أن

$$\therefore v^2 = 2gr \sin \theta \cos^2 \theta \quad (3)$$

وعندما يصل الجسم إلى B فإنه يصنع مسافة رأسية أخرى هي CB :

$$CB = r(1 - \sin \theta) \quad (4)$$

إذن سرعة الجسم عند B نحصل عليها باستخدام (3)، (4) حيث

$$\begin{aligned} V^2 &= v^2 + 2gr(1 - \sin \theta) \\ &= 2gr \sin \theta \cos^2 \theta + 2gr(1 - \sin \theta) \\ &= 2gr(1 - \sin^3 \theta) \end{aligned}$$

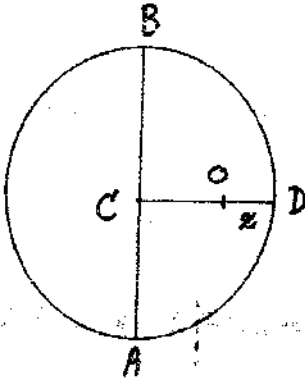
$$V = \sqrt{2gr(1 - \sin^3 \theta)} \equiv B \quad \text{إذن سرعة الجسم عند } B$$

مثال (3): برهن أن السرعة الابتدائية لجسم معلق في نقطة ثابتة بخيط غير مرّن طوله a يجب أن لا تقل عن $\sqrt{5ag}$ ، لكي يصنع الجسم دائرة رأسية كاملة، وإذا بدأ الجسم بسرعة $2\sqrt{ag}$ ، وعندما يكون الخيط أفقياً ثبت عند نقطة ما عليه

وأكمل الجسم دائرة كاملة حول نقطة التثبيت. أين يجب أن يكون موقع هذه النقطة علي الخيط؟

الحل:

المطلوب الأول سبق الحصول عليه والإجابة عنه في المناقشة العامة معادلة (6). ومع ذلك يمكن الإجابة عليه بطريقة أخرى كما يلي:



نفرض أن A, B - كما بالشكل -

هما أسفل وأعلى نقطة علي

محيط دائرة مركزها C وهي

نقطة التعليق. نفرض أن

V هي سرعة الجسم عند

A, B سرعتيه عند B ، إذن:

$$\therefore v^2 = V^2 - 4ag \quad (1)$$

والآن إذا كان الجسم يعمل دورة كاملة، فإن الخيط يجب أن يظل مشدودا عندما يصل B (الشئ هنا يكاد يكون ضعيفا جدا just taut)، إذن عند هذا الموضع يجد

أن يكون $\frac{mv^2}{a}$ ليس أقل من mg أي أن

$$\frac{mv^2}{a} \geq mg \therefore v^2 \geq ag$$

من (1) نجد أن: $V^2 - 4ag < ag \therefore V < \sqrt{5ag}$

أي يجب أن تكون $V = \sqrt{5ag}$ علي الأقل لعمل دورة كاملة للجسيم، وهي نفس النتيجة السابقة في (6) من ج.

أما المطلوب الثاني، إذا كانت $V = \sqrt{4ag}$ هي السرعة الابتدائية عند A ، وبفرض أن v هي سرعته عندما يكون علي الخط الأفقي مع المركز C (عند D). وهذا يعني أن الجسيم تحرك مسافة راسية $AC = a$ ، إذن:

$$\therefore v^2 = V^2 - 2ag = 4ag - 2ag = 2ag \quad (A)$$

وفي هذا الوضع الأفقي، إذا ثبت الخيط عند نقطة O علي بعد x من D فإن الجسيم سوف يتمكن من صنع دائرة رأسية حول O كمركز لها إذا كان الخيط يكاد يكون مشدودا (just taut) علي الأقل؛ عندما يكون الجسيم رأسيا فوق O (أي علي ارتفاع x فوق O). إذن علي ارتفاع x فوق O تكون سرعة الجسيم هي u حيث $u^2 = v^2 - 2gx$ ومن (A)

$$\therefore u^2 = 2ag - 2gx \quad (B)$$

وحيث إن الخيط يكاد يكون مشدودا (The string is just taut) عند اعلي نقطة فوق O (فمن معادلة الحركة عند هذه النقطة في اتجاه نصف القطر) فإن:

$$u^2 = xg \quad \text{إذن:} \quad \frac{mu^2}{x} = mg$$

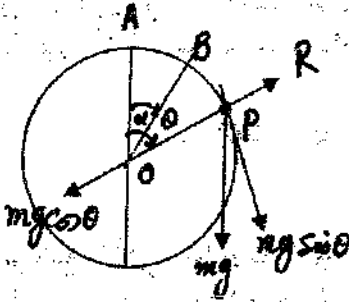
ومن (B) نحصل علي:

$$x = \frac{2a}{3} \leftarrow xg = 2ag - 2gx$$

الحركة على حافة دائرة رأسية

أ- على السطح الخارجي لدائرة رأسية:

(Motion on the Outside of Vertical Circle)



نعتبر حركة جسيم ثقيل

على دائرة رأسية مملوءة،

مركزها نقطة O ، ونصف

قطرها a . حيث ترك الجسيم

ليزلق من نقطة B ؛ التي

تصنع زاوية α عند

المركز من أعلى نقطة

A . إذا كان موضع الجسيم عند P عند اللحظة t يصنع زاوية θ عند المركز من أعلى نقطة A ، حيث تؤثر على الجسيم وزنه رأسياً لأسفل ورد الفعل R العمودي على الدائرة في اتجاه OP ، فإن معادلات الحركة تكون:

$$m \frac{V^2}{a} = -R + mg \cos \theta \quad (1)$$

$$m a \ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{V dV}{d\theta} = ag \sin \theta \therefore V^2 = C_1 - 2ag \cos \theta$$

$$\text{at } t = 0, \alpha = \theta, \dot{\theta} = 0, V = 0 \Rightarrow C_1 = 2ag \cos \alpha$$

$$\therefore V^2 = 2ag (\cos \alpha - \cos \theta) \quad (3)$$

من (3) في (1) نحصل على:

$$R = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) \quad (4)$$

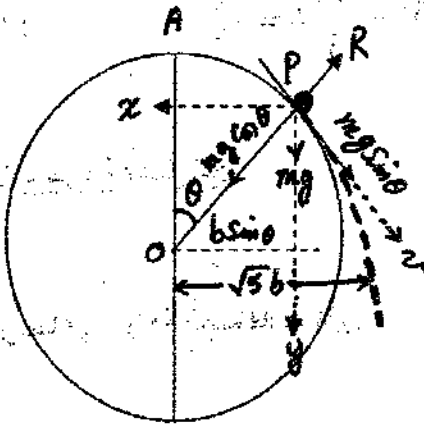
بما أن الجسم يترك الدائرة عندما يصبح $R = 0$ ، إذن من (4) نحصل على:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right) \quad (5)$$

مثال (1): وضعت نقطة مادية عند أعلى نقطة علي سطح كرة ملساء نصف قطرها b . فإذا بدأت النقطة للمادية الحركة من سكون، أثبت أنها تترك سطح الكرة عندما تنزلق زاوية قدرها $\cos^{-1}(2/3)$ ، وأنه عندما تبعد النقطة المتحركة عن القطر الرأسي مسافة $\sqrt{5}b$ يكون عمقها أسفل مستوي مركز الكرة يساوي $\frac{19b}{4}$ ؟

الحل:

معادلات الحركة:



$$m \frac{v^2}{b} = mg \cos\theta - R \quad (1)$$

$$mb\ddot{\theta} = mg \sin\theta \quad (2)$$

من (2) بفصل المتغيرات والتكامل

والشروط الأولية:

$$t=0, \quad \theta=0, \quad v=0$$

$$\therefore v^2 = 2bg(1 - \cos\theta) \quad (3)$$

من (3) في (1) نحصل علي:

$$\therefore R = mg(3\cos\theta - 2) \quad (4)$$

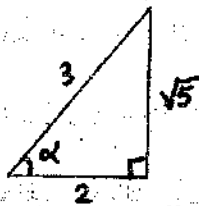
بما أن النقطة المادية تترك سطح الكرة عندما ينعدم رد الفعل، فمن (4) نحصل علي:

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3} \quad (5)$$

بالتعويض من (5) في (3) لنحصل علي السرعة التي تترك بها النقطة المادية سطح الكرة وهي: $v^2 = \frac{2}{3}bg$. وبعد أن تترك النقطة سطح الكرة تتحرك كمقذوف بالسرعة الابتدائية $\sqrt{\frac{2bg}{3}}$ وزاوية القنف $\alpha = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$.

$$\therefore x = \sqrt{5}b - b\sin\theta = \sqrt{5}b - \frac{\sqrt{5}}{3}b = \frac{2\sqrt{5}}{3}b \quad (B)$$

معادلات حركة المقذوف:



كما درسنا في حركة المقذوفات، فإن:

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = g$$

$$\dot{x} = v\cos\alpha$$

$$\dot{y} = gt + v\sin\alpha$$

$$x = vt\cos\alpha \quad (B) \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\alpha \quad (C)$$

من (A) في (B) حيث $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ، $v = \sqrt{\frac{2bg}{3}}$ فنحصل علي:

$$\therefore t = \sqrt{\frac{15b}{2g}} \quad (D)$$

من (D) في (C) نجد أن

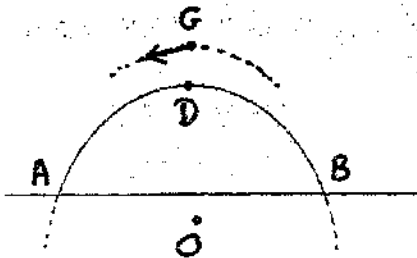
$$y = \frac{1}{2}g \times \frac{15b}{2g} + \sqrt{\frac{2bg}{3}} \times \sqrt{\frac{15b}{2g}} \times \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore y = \frac{65b}{12}$$

$$\frac{19b}{4} = \frac{65b}{12} - \frac{2b}{3} = y - b \cos \theta = \text{إذن العمق أسفل مركز الكرة}$$

مثال (2): تتحرك دراجة بخارية علي كوبري موضوع علي قناة عرضها 20م، وكان أعلى نقطة في الكوبري ترتفع 2.5م عن كلا الطرفين. أوجد أقصى سرعة يجب أن تتحرك بها الدراجة علي الكوبري لتعبره بأمان إذا كان ارتفاع مركز نقل الرجل والدراجة عن الكوبري يساوي 3/4م؟

الحل:



نفرض أن AB يمثل القوس

الدائري للكوبري، D تمثل

منتصف الكوبري (أعلى نقطة).

نفرض أن O مركز الدائرة المأخوذ

منها القوس AB ، وأن a نصف قطرها، إذن:

$$(a - 5/2)^2 + 10^2 = a^2$$

فإن $a = 21\frac{1}{4}$. مركز ثقل الجسم المتحرك (الرجل بالدراجة) G يتحرك في

دائرة نصف قطرها $22 = 21\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$. إذا كانت m كتلة المتحرك، فإن:

$$\therefore \frac{mV^2}{2200} = mg - R \quad \therefore R = m(g - \frac{V^2}{2200})$$

ولكي يعبر الرجل بالدراجة بأمان، فيجب أن $R \neq 0$

$$\therefore V^2 \leq 2200g \text{ or } V \leq \sqrt{2200 * 980} \text{ Cm/Sec}$$

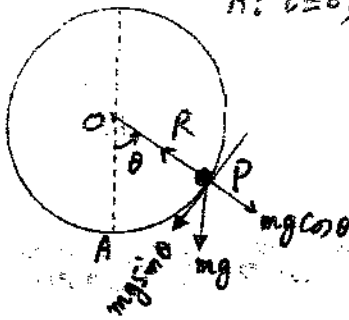
ب- الحركة على السطح الداخلي لدائرة رأسية:

(Motion on the Inside of a Vertical Circle)

سوف نعتبر - بإذن الله - حركة جسم على السطح الداخلي للأملس لدائرة رأسية؛ مركزها O ، ونصف قطرها a ، ونفرض أن الجسم قذف بالسرعة u من أسفل نقطة A . نفرض أن P هو موضع الجسم عند اللحظة t حيث $\angle AOP = \theta$ وتؤثر عليه رد الفعل R في اتجاه $\overline{PO}$ ، ووزنه mg رأسياً لأسفل.

معادلات الحركة:

A: $t=0, v=u$



$$m \frac{V^2}{a} = R - mg \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{V dV}{d\theta} = -ag \sin \theta \quad (2)$$

من (2) بفصل المتغيرات والتكامل والشروط الابتدائية
 $(t=0, V=0, \theta=0)$

$$\therefore V^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos \theta) \quad (4)$$

بالتعويض عن V من (4) في (1):

$$\therefore R = m \left(\frac{u^2}{a} - 2g + 3g \cos \theta \right) \quad (5)$$

من (5) نجد انه بزيادة θ من 0 إلى π ، تقل قيمة $\cos \theta$ من 1 إلى -1 وبالتالي فإن أقل قيمة لكل من R، V تحدث عند أعلى نقطة (إذا وصلت إليها النقطة المادية). وعندئذ تصبح $V^2 = u^2 - 4ag$ ، إذن:

$$\therefore R = \frac{m}{a}(u^2 - 5ag) \quad (6)$$

ومن (6) نقول: إذا كانت $u^2 > 5ag$ فإن النقطة المادية تعمل دورات كاملة. أما إذا كانت $u^2 < 5ag$ ، فإن قيمة السرعة أو رد الفعل أو كليهما سوف يتناوبان الصفر عند قيمة ما للزاوية θ أقل من π .

نفرض أن $V=0$ عندما $\theta=\theta_1$ ، فمن (4) نجد أن:

$$\therefore \cos\theta_1 = \frac{2ag - u^2}{2ag} \quad (7)$$

ونفرض أن $R = 0$ عندما $\theta = \theta_2$ فمن (5) نجد أن:

$$\therefore \cos\theta_2 = \frac{2ag - u^2}{3ag} \quad (8)$$

وبذلك يكون لدينا ثلاث حالات مميزة:

الحالة الأولى:

إذا كان $u^2 < 2ag \Leftrightarrow \cos\theta_1 > \cos\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 < \theta_2$ ، وذلك يعني أن السرعة سوف يتلاشى قبل رد الفعل؛ مما يعني أن الجسم سيسكن لحظياً ويأخذ في العودة (في الاتجاه المضاد) وتكون الحركة تنبذية.

الحالة الثانية:

إذا كان $u^2 = 2ag \Leftrightarrow \cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ أي أن السرعة ورد الفعل يتلاشان معاً. أي أن الجسم يكون في حالة سكون لحظي عندما يكون في وضع أفقي مع المركز، ويعود للخلف وتكون الحركة تنبذية.

الحالة الثالثة:

إذا كان $u^2 > 2ag \Leftrightarrow \cos\theta_1 < \cos\theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 > \theta_2$ أي أن رد الفعل يتلاشى قبل السرعة؛ مما يعني أن الجسم يترك الدائرة ويتحرك كمقذوف، ويرسم مساره قطعاً مكافئاً.

الخلاصة:

(ii) $u^2 > 2ag$: یضیع نور ات کاملاً

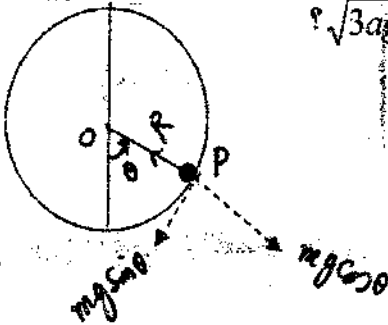
(iii) $2ag < u^2 < 5ag$: يترك الجسم سطح الدائرة في موضع من النصف العلوي ويتحرك كمقنوف.

مثال (1): قذفت نقطة مادية من أسفل نقطة علي السطح الداخلي لاسطوانة دائرية قائمة، نصف قطرها a بالسرعة $\frac{1}{5}\sqrt{95ag}$. اثبت أن النقطة المادية

نترك السطح عندما تصبح علي بعد زاوي قدره $\cos^{-1}(3/5)$ من اعلي نقطة من مسارها الدائري، وأن سرعتها عندئذ $\sqrt{3ag/5}$ ؟

الحل:

معادلات الحركة:



$$\frac{mv^2}{a} = R - mg \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{mv}{a} \frac{dv}{d\theta} = -mg \sin\theta \quad (2)$$

بتكامل (2) والضرب في u واخذ

الشروط الابتدائية

$$t=0, \theta=0, v=\frac{1}{5}\sqrt{95ag}$$

$$\therefore v^2 = 2ag \cos\theta + \frac{9}{5}ag \quad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نجد أن:

$$\begin{aligned} \therefore R &= mg \cos\theta + \frac{m}{a}(2ag \cos\theta + \frac{9}{5}ag) \\ &= (3\cos\theta + \frac{9}{5})mg \end{aligned}$$

عندما تترك النقطة المادية السطح فإن $R = 0$ ومنها نحصل على:

$$\therefore \theta = \cos^{-1}(-\frac{3}{5}) \quad (4)$$

من (4) في (3) فنحصل على سرعة النقطة المادية عندما تترك السطح

$$\therefore v^2 = 2ag(-\frac{3}{5}) + 9ag = \frac{3}{5}ag$$

$$\therefore v = \sqrt{3ag/5}$$

إن ينعدم R عند الزاوية $(\pi - \theta)$ من أعلى نقطة من المسار

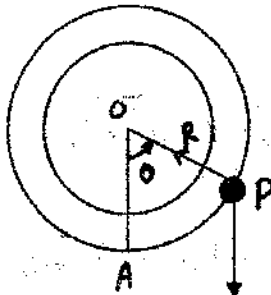
$$\therefore \cos\phi = \cos(\pi - \theta) = \frac{3}{5} \quad \therefore \phi = \cos^{-1}(\frac{3}{5})$$

مثال (2): يتحرك جسيم كتلته m داخل أنبوبة دائرية ملساء ثابتة في مستوى رأسي. فإذا كانت أكبر سرعة لها تساوي n من المرات أقل سرعة لها. أثبت أن الضغط الواقع على الجسم عندما يتحرك رأسياً هو $\frac{2(n^2+1)}{n^2-1}mg$ وسرعته

عندئذ تساوي $\sqrt{\frac{n^2+1}{2}}$ من المرات سرعته عند أعلى نقطة؟

الحل:

معادلات الحركة:



$$m \frac{V^2}{a} = R - mg \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{VdV}{a d\theta} = -g \sin \theta \quad (2)$$

من (2) بالتكامل والشروط الابتدائية نحصل على: mg

$$V^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

$$\therefore R = \frac{mu^2}{a} - ag(2 - 3\cos \theta) \quad (4)$$

حيث u سرعة الجسيم عند أسفل نقطة (A). نفرض أن V_1, V_2 هما أكبر سرعة وأقل سرعة للجسيم، إذن من (3):

$$\therefore V_1^2 = u^2, \quad V_2^2 = u^2 - 4ag$$

$$\therefore V_1^2 = n^2 V_2^2 \quad \text{معطى} \quad \therefore u^2 = \frac{4agn^2}{n^2 - 1}$$

بما أن الجسم يتحرك رأسياً عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، فإن من (4) والتعويض عن u^2 من آخر معادلة فإن:

$$\therefore R = \frac{m}{a}(u^2 - 2ag) = \frac{2(n^2 + 1)}{n - 1}mg$$

وسرعته عندئذ تكون

$$V = \sqrt{u^2 - 2ag} = \sqrt{\frac{2ag(n^2 + 1)}{n^2 - 1}}$$

$$V_2 = \sqrt{u^2 - 4ag} = \sqrt{4ag/(n^2 - 1)}$$

$$\sqrt{\frac{n^2 + 1}{2}} \text{ إذن النسبة بين السرعتين تساوي}$$

جسرة وعجلة نقطة على حافة قرص يتحرك على خط مستقيم:

باعتبار أن القرص A

متحرك على محور $\overline{OX}$ ،

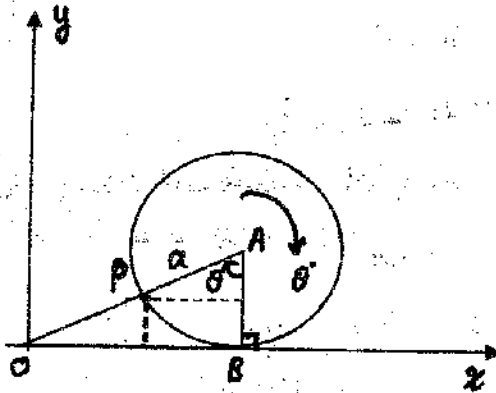
وأن القرص يمس المحور

في نقطة B عند لحظة

t من بدء الحركة، وأن

الزاوية $\hat{BAP} = \theta$ فإن

θ هي السرعة الزاوية



للقراص حول A . نستخدم العمودي على المستقيم من نقطة O محورا oy . فإذا كانت $P(x, y)$ عند اللحظة t هي موضع النقطة قيد الدراسة، فإن:

$$x = OB - AP \sin \theta = a(\theta - \sin \theta); a\theta = PB = OP$$

$$y = AB - AP \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

$$\text{متجه الموضع} \equiv \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$= a(\theta - \sin \theta)\hat{i} + a(1 - \cos \theta)\hat{j} \quad (1)$$

$$\therefore \dot{\vec{r}} = a\dot{\theta}(1 - \cos \theta)\hat{i} + a\dot{\theta} \sin \theta \hat{j} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= a[(1 - \cos \theta)\ddot{\theta} + \dot{\theta} \sin \theta] \hat{i} \\ &+ a[\sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \dot{\theta} \cos \theta] \hat{j} \end{aligned} \quad (3)$$

حالة خاصة:

عندما $\theta = 0$ أي من نقطة التماس B ، نجد أن $V = 0$ أي أن نقطة التماس في سكون لحظي. من (2) نجد أن:

$$\therefore V^2 = a^2 \dot{\theta}^2 (1 - \cos \theta)^2 + a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \quad \therefore V = 2a\dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \phi = \frac{a \sin \theta}{a(1 - \cos \theta)} = \cot \theta / 2 \quad \text{حيث } \phi \text{ مع } ox \text{ وتصنع زاوية}$$

$$\therefore \vec{V} \equiv (2a\dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \frac{\pi - \theta}{2})$$

من الشكل المقابل، ينتج أن

$$V_P = \theta \cdot PB \text{ في اتجاه}$$

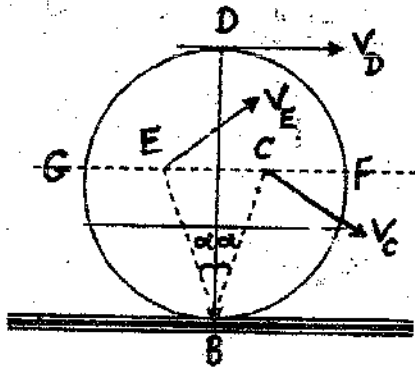
$$|V_P| = (AP)\omega, |V_A| = (AB)\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{V_{PA}}{AP} = \frac{VA}{AB}$$

$$AB \perp mn, PA \perp lm:lmn$$

إذن المثلث lmn يشابه المثلث APB ، وينتج أن $PB \perp ln$ ، كما أن $\omega = \frac{ln = V_P}{PB}$ ، أي أن النقطة P تتحرك في الفضاء كما لو كان القرص يدور حول نقطة B .

ثالثاً لإيجاد سرعة النقط C, D, E :



$$\begin{aligned} V_C &= (BC)(\cos\alpha \hat{i} - \sin\alpha \hat{j})\omega \\ &= \omega a(\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}) \end{aligned}$$

حيث C منتصف AF

$$V_D = (BD)\omega = (BD)\omega \hat{i} = 2a\omega \hat{i}$$

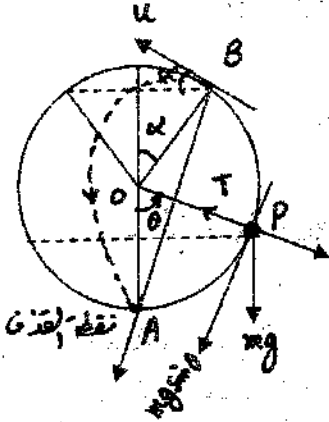
$$V_E = a\omega(\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j})$$

حيث E منتصف AG

مسائل محلولة على الحركة في دائرة

(1) جسم يتصل بخيط غير مرن طوله a ، ومثبت طرفه الآخر في نقطة ثابتة، قذف الجسم بالسرعة $\sqrt{7ag/2}$. أثبت أن الشد ينعدم بعد أن يدور الخيط زاوية قدرها 120° . وأثبت أن الجسم في حركته بعد القذف في القطع المكافئ يمر بالنقطة التي قذف منها؟

الحل:



معادلات الحركة:

$$m(-a\dot{\theta}^2) = mg \cos\theta - T$$

$$\therefore T = m \frac{V^2}{a} + mg \cos\theta \quad (1)$$

والسرعة عند الموضع P

$$\therefore V^2 = V_0^2 - 2gx$$

$$x = OC = a(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore V^2 = \frac{7ag}{2} + 2a(\cos\theta - 1)g$$

$$= \frac{3ag}{2} + 2ag \cos\theta \quad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) لنحصل على $T = 3mg(\frac{1}{2} + \cos\theta)$

بما أن الجسم يتحرك كمقذوف عندما ينعدم الشد؛ أي أن:

$$\theta = 120^\circ \Leftarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Leftarrow T = 0$$

سرعة القذف بعد ارتفاع الخيط

$$(2) \Rightarrow V = \sqrt{ag\left(\frac{3}{2} - 1\right)} = \sqrt{ag/2} = u$$

$$\text{زاوية القذف} \equiv \alpha = \pi - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{المدى على الأفقي} \equiv R = \frac{2u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

والآن ندرس المقذوف على المستوي المائل الذي يمر بالمستقيم AB ، حيث سرعة القذف u ، وزاوية القذف $\alpha = 60^\circ$ مع الأفقي ثم نحسب المدى على المستوي المائل - كما سبق - فنحصل على

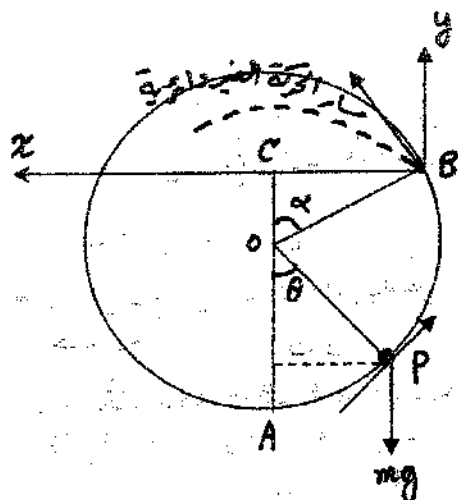
$$\tilde{R} \equiv \text{المدى على المائل} = a\sqrt{3}$$

وهذه نفس المسافة AB ، أي أن المقذوف يمر بالنقطة A (نقطة القذف).

(2) قذفت نقطة مادية تتصل بنهاية خيط في الاتجاه الأفقي بالسرعة $\sqrt{2bg}$ عندما كان الخيط رأسياً. أثبت أن النقطة المادية تكمل دورات كاملة إذا كان $b > \frac{5a}{2}$ ، وأن الخيط يرتخي إذا كان $\frac{5a}{2} > b > a$ ؛ حيث a طول الخيط وأنه في الحالة الأخيرة تصل النقطة للمادية إلى ارتفاع فوق نقطة القذف قدره

$$h = \frac{1}{27a^2} (4a - b)(a + 2b)^2$$

معادلات الحركة:



$$mV^2/a = T - mg \cos \alpha$$

$$\therefore V^2 = 2bg - 2ag(1 - \cos \theta)$$

$$T = mg \cos \theta + \frac{2m}{a} gb$$

$$- 2mg(1 - \cos \theta)$$

$$= mg(3\cos \theta - 2 + \frac{2b}{a})$$

وحتى تكمل النقطة المادية دورات كاملة، يجب

$$T > 0 \text{ at } \theta = \pi \therefore b > 5a/2$$

ويرتخي الخيط إذا انعدم الشد في النصف العلوي من دائرة الحركة؛ أي أن $T = 0$

$$\text{عندما } \pi > \theta > \pi/2$$

$$\therefore -2 + \frac{2b}{a} > 0 \quad \therefore a > b,$$

$$-3 - 2 + \frac{2b}{a} > 0 \quad \therefore b < 5a/2$$

$$a < b < \frac{5a}{2} \text{ إذن الخيط يرتخي إذا كان}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3}(1 - b/a) = \cos(\pi - \alpha) \text{، إذن } T = 0 \text{ عندما يرتخي الخيط}$$

(4) قذفت نقطة مادية بسرعة أفقية V_0 من أسفل نقطة A في مسار دائري رأسي نصف قطره α ، فإذا علم أن النقطة المادية المتحركة تسكن عند B . أثبت

$$V_0 = \sqrt{\frac{g}{a} AB} \quad ?$$

الحل:

معادلات الحركة:

$$m a \ddot{\theta} = -mg \sin \theta, \quad m a \dot{\theta}^2 = R - mg \cos \theta$$

بتكامل الأولي واعتبار الشروط الأولية $t = 0, V_0 = a \dot{\theta}, \theta = 0$ فإن

$$C_1 = \frac{V_0^2}{2a} - g$$

$$\therefore a \dot{\theta}^2 = 2g(\cos \theta - 1) + V_0^2/a$$

عندما تسكن النقطة المادية عند B ، $V = 0$ ، $\theta = 2\theta$

$$\therefore V_0^2 = 2ag(1 - \cos 2\theta) = 4ag \sin^2 \theta$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 2\theta = 4a^2 \sin^2 \theta$$

$$\therefore V_0 = \sqrt{\frac{g}{a} \overline{AB}}$$

(5) وصلت نقطتان ماديتان كتلتاهما m, M بخيط غير مرن، ووضعنا علي السطح الخارجي لقرص دائري. فإذا كانت النقطة m في المستوى الأفقي لمركز القرص، وكان نصف قطر القرص M يصنع زاوية α مع الرأسي، فإذا علم أن $M \sin \alpha > m$. أوجد سرعة كل نقطة بعد أن يدور نصف القطر الواصل إلي كل نقطة زاوية قدرها θ . أثبت أن الكتلة تترك السطح عندما تحقق المعادلة

$$\sin\theta[(3M + m)\sin\alpha - 2m] = \cos\alpha[(3M + m)\cos\theta - 2M]?$$

الحل:

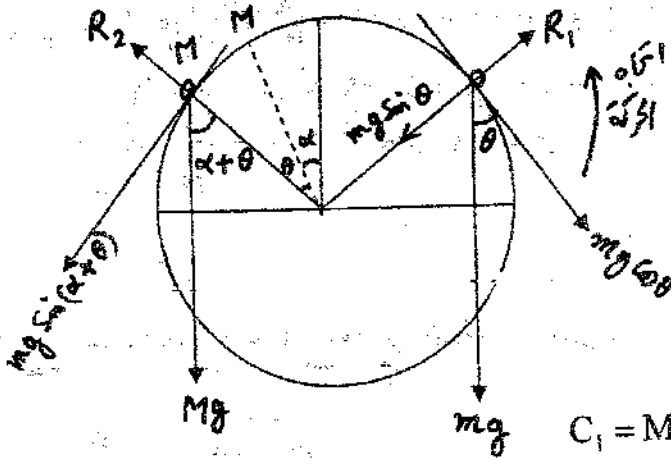
معادلات الحركة:

$$Ma\ddot{\theta}^2 = Mg \cos(\alpha + \theta) - R_2 \quad (1)$$

$$Ma\ddot{\theta} = Mg \sin(\alpha + \theta) \quad (2)$$

$$ma\ddot{\theta}^2 = mg \sin\theta - R_1 \quad (3)$$

$$ma\ddot{\theta} = -mg \cos\theta \quad (4)$$



بجمع (2) + (4) ثم فصل

المتغيرات والتكامل

بالنسبة إلى \$\theta\$، وأخذ

الشروط الابتدائية

فنهصل \$\dot{\theta}a = 0\$, \$\theta = 0\$

علي ثابت التكامل: \$C_1 = Mg \cos\alpha\$

فنهصل علي المعادلة التالية:

$$(\dot{\theta})^2 = \frac{2ag}{M + m} [M \cos\alpha - M \cos(\alpha + \theta) - m \sin\theta] \quad (5)$$

المعادلة الأخيرة تمثل مربع سرعة كل نقطة عندما يدور نصف القطر زاوية \$\theta\$ بما أن الكتلة \$M\$ تترك سطح القرص عندما \$R_2 = 0\$، فإن:

$$\therefore (a\dot{\theta})^2 = ag \cos(\alpha + \theta) \quad (6)$$

من (5)، (6) نحصل على:

$$ag(M + m)\cos(\alpha + \theta) = 2ag[M \cos \alpha - M \cos(\alpha + \theta) - m \sin \theta]$$

$$\therefore (3M + m)\cos(\alpha + \theta) = 2M \cos \alpha - 2m \sin \theta$$

$$(3M + m)(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) = 2M \cos \alpha - 2m \sin \theta$$

$$\therefore \cos \alpha \{(3M + m)\cos \theta - 2M\} = \sin \theta \{(3M + m)\sin \alpha - 2m\}$$

وهذه هي العلاقة التي يجب أن تحققها θ لكي تترك M سطح القرص.

(6) تعبر سيارة ركاب كوبري على هيئة قوس دائري نصف قطره 50 ft . ما أقصى سرعة يمكن أن تسير بها السيارة بدون أن تترك سطح الكوبري عند أي نقطة عليه؟

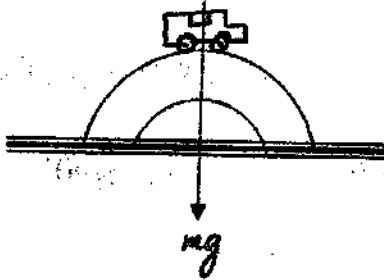
الحل:

معادلة حركة السيارة عند أي نقطة من المسار هي:

$$m \frac{V^2}{a} = mg - R$$

تترك السيارة سطح

الكوبري عندما $R = 0$



$$\therefore mV^2/a < mg \therefore V^2 < ag$$

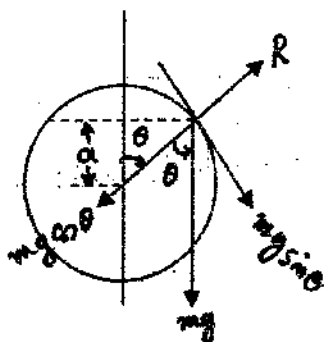
$$\therefore V < 32 * 50 = 40 \text{ ft / Sec}$$

(7) بدأت نقطة مادية حركتها من سكون من أعلى نقطة علي سطح كرة
ملساء نصف قطرها a . اثبت أنها تترك السطح عندما تنزلق زاوية قدرها
 $\cos^{-1}(2/3)$ ، وأنه عندما تبتعد النقطة المتحركة عن القطر الرأسي مسافة $\sqrt{5}a$

يكون عمقها أسفل مركز الكرة مساويا $\frac{19a}{4}$ ؟

الحل:

معادلات الحركة:



$$ma\ddot{\theta}^2 = mg \cos \theta - R \quad (1)$$

$$ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (2)$$

بفصل المتغيرات والتكامل في (2):

$$\therefore a\dot{\theta}^2 = -2g \cos \theta + C_1$$

$$\text{at } t = 0, \dot{\theta} = 0, \theta = 0 \therefore C_1 = 2g$$

$$\therefore a\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

نترك النقطة المادية سطح الكرة عندما $R = 0$ ، فمن (3) في (1)

$$\therefore 2g(1 - \cos \theta) = g \cos \theta \therefore \theta = \cos^{-1}(2/3)$$

$$(3) \Rightarrow V^2 = 2ag(1 - 2/3) = \frac{2}{3}ag \quad (4)$$

عندما تترك النقطة المادية سطح الكرة، تتحرك كمقنوف يمكن دراستها

كالآتي:

$$x = ut \cos \theta \quad (5) \quad y = \frac{1}{2}gt^2 + ut \sin \theta \quad (6)$$

$$at \sqrt{5}a = x + a \sin \theta$$

$$\therefore x = \sqrt{5}a - \frac{a}{3}\sqrt{5} = \frac{2}{3}a\sqrt{5} \quad (7)$$

بالتعويض من (7) في (5) للحصول على الزمن:

$$\therefore \frac{2}{3}a\sqrt{5} = \sqrt{\frac{2ag}{3}} \cdot \frac{2}{3}t$$

$$\therefore t = \sqrt{15a/2g} \quad (8)$$

بالتعويض من (8) في (6) فإن:

$$y = \frac{g}{2} \frac{15a}{2g} + \sqrt{\frac{2ag}{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \sqrt{\frac{15a}{2g}}$$

$$= \frac{65}{12}a \quad (9)$$

إذن العمق أسفل مركز الكرة يعطي من

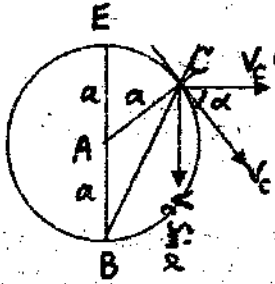
$$h = y - a \cos \theta = \frac{65}{12}a - \frac{2}{3}a = 19a/4$$

(8) يتحرك قرص دلتري على سطح أفقي بدون انزلاق، فإذا علم أن مركز القرص يتحرك بسرعة 10 قد/ث. أوجد سرعة أعلى نقطة من القرص، والنقطة

التي تبعد عن المركز بقدر a ، وترتفع عن السطح الأفقي بقدر $\frac{3a}{2}$ ، حيث a هو نصف قطر القرص؟

الحل:

سرعة مركز القرص $\equiv V_A = a\omega$ ، السرعة الزاوية $\equiv \omega = 10$



$$V_A = 100\hat{i}, V_E = 2a\omega\hat{i} = 20\hat{i},$$

$$V_C = \omega(BC)(\cos\alpha\hat{i} - \sin\alpha\hat{j})$$

$$\therefore BC^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 3a^2$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore V_C = 5a(3\hat{i} - \sqrt{3}\hat{j})$$

تمارين (4)

الحركة في دائرة

(1) تتحرك نقطتان بسرعتين منتظميتين u, v علي خطين متعامدين oy, y' وكل منهما متجه نحوه. إذا كان بعدهما عن O عند $t=0$ هما a, b علي التوالي. فأوجد السرعة الزاوية للخط الواصل بينهما بعد زمن t ، وأثبت أن أقل قيمة لها عند $t = \frac{au + bv}{u^2 + v^2}$ ، وأيضا العجلة الزاوية لنفس الخط؟

(2) قضيب AB طوله $28cm$ يتحرك طرفاه B, A علي المحورين oy, ox علي الترتيب. وعندما كان $OA = 12cm$ كانت السرعة الزاوية للقضيب $2rad/sec$ وعجلته الزاوية $3rad/sec^2$ ، أوجد السرعة الخطية والعجلة لكل من طرفي القضيب عند هذه اللحظة؟

(3) قضيبان متصلان عند A مفصليا وأولهما 10 سم وثانيهما 16 سم. يدور AO حول طرفه الثابت O ، بينما تتحرك B علي مستقيم مار بالنقطة O . عندما كانت زاوية AOB تساوي 60° كان OA يدور بسرعة زاوية $2rad/sec$ وعجلة زاوية $4rad/sec^2$. أوجد السرعة والعجلة للقضيب AB عند نفس اللحظة؟

(4) نقطة مادية وزنها W ، تتحرك علي محيط دائرة في مستوى رأسي حيث تتصل بنقطة ثابتة بواسطة خيط خفيف غير مرن. فإذا كان الشد في الخيط يساوي nW, W عند اعلي نقطة وأسفل نقطة علي الترتيب. أثبت أن $n - m = 6$ ؟

(5) علق جسيم بخيط خفيف غير مرن طوله 90cm ، وبعد التعليق بدأ يتحرك بسرعة في الاتجاه الأفقي، وعندما وصل الجسيم إلى ارتفاع 1.5m عن أسفل نقطة أثناء التعليق بدأ الخيط في الارتخاء أوجد الارتفاع الذي يصل إليه الجسيم بعد ذلك؟

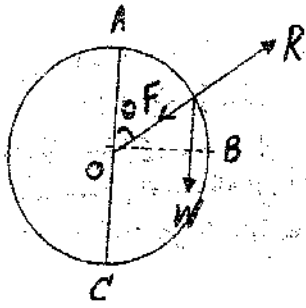
(6) وصلت نقطة مادية كتلتها 2.2kg بطرف خيط مرن طوله الطبيعي 50cm ليتكون بندول مخروطي يعمل 60 دورة في الدقيقة، وفي هذه الحالة يكون طول الخيط 60cm . أوجد الشد في الخيط، وأوجد طاقة حركة الكتلة وطاقة الوضع الناتجة عن الاستطالة في الخيط؟

(7) ترك جسيم لينزلق من سكون من أعلى نقطة علي سطح كرة ملساء مثبتة نصف قطرها a . أوجد النقطة التي يترك عندها الجسيم سطح الكرة، والنقطة التي يقطع فيها مساره بعد ذلك المستوي الأفقي المار بمركز الكرة؟

(8) تنزلق نقطة مادية من سكون من نقطة علي ارتفاع $\frac{2a}{3}$ أعلى مركز كرة ملساء نصف قطرها a . اثبت أن النقطة المادية تترك السطح عندما تصبح علي بعد زاوي $\cos^{-1}(4/9)$ من مستوي المركز وأن سرعتها عندئذ تكافئ $\frac{2}{3}\sqrt{ag}$

(9) قذفت خرزة بسرعة v من أعلى نقطة A علي سلك دائري أملس رأسي نصف قطره a فانزلقت الخرزة علي السلك حتي اصطدمت بخرزة أخرى مساوية لها في الكتلة وموضوعة عند أسفل نقطة في الدائرة B (أي أن AB هو قطر

الذئرة الرأسي). فإذا اندمجت الذئرتان لحظة التصادم، ووصلت الكتلة المندمجة بالكاد إلى نقطة A . أثبت أن $u^2 = 12ag$ ؟



(10) ترك جسيم لينزلق

من سكون على السطح

الخارجي لطوق دائري أملس

نصف قطره a وذلك من أعلى

نقطة A . يؤثر على الجسيم

فضلا عن وزنه w قوة ثابتة

المقدار F تتجه نحو المركز O . أوجد أقل قيمة للقوة F لكي تظل الحركة مقيدة بالطوق حتى أسفل نقطة C . وما السرعة التي يصل بها إلى C ، ولماذا لا تتأثر بقيمة F . ما مقدار رد الفعل من الطوق على الجسيم عندما يصل إلى B (نهاية قطره الأفقي).

$$[F_{\min} = 5w, V_C = 2\sqrt{ag}, R_B = 3w]$$

(11) جسيم كتلته m يتذبذب خلال زاوية مقدارها 180° على السطح

الداخلي الأملس لطوق نصف قطره a مثبت في مستوي رأسي. إذا كانت u هي سرعة الجسيم عند أي نقطة. أثبت أن الضغط على الطوق عند أي نقطة يكافئ

$$\frac{3mu^2}{2a}$$

(12) قذف جسيم بسرعة u من أسفل نقطة على السطح الداخلي لكرة ملساء مثبتة نصف قطرها a . اثبت أنه إذا كانت $2ag < u^2 < 5ag$ فإن الجسيم يترك سطح الكرة على ارتفاع $(u^2 + ag)/3g$ فوق نقطة بداية الحركة، وإذا كانت $u^2 = 7ag/2$ ، فإن الجسيم بعد أن يترك السطح يعود ليصطدم به عند نقطة بداية الحركة؟

the first of these is the fact that the
the second is the fact that the
the third is the fact that the
the fourth is the fact that the
the fifth is the fact that the

5

